● 国家出版基金资助项目

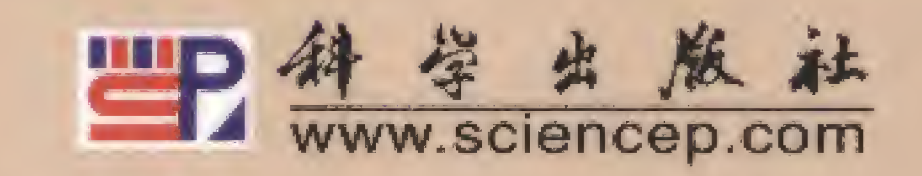
中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

多复变函数论卷 I

华罗庚 /著

陆启镗 /审校



(O-3864.0101)

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集｜多复变函数论卷 I｜


ISBN 978-7-03-027195-2

9 787030 271952 >

销售分类建议：高等数学

定 价：98.00元

国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

多复变函数论卷 I

华罗庚　著

陆启铿　审校

科学出版社

北京

内 容 提 要

作者自 1952 年以来在多复变数函数论方面发表过许多论文，本书包括这些论文的主要结果.

在第一章中，证明了一系列的恒等式；第二章是关于矩阵积分的计算；第三章是方阵极坐标表示法及特征流形的体积的计算；第四章是关于核函数及 Cauchy 公式；第五章是矩阵双曲空间的调和分析；第六章是对称及斜对称方阵双曲空间的调和分析；第七章是超球双曲空间的调和分析.

本书适合数学及相关专业大学生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：多复变函数论卷 I /华罗庚著；陆启铿审校. —北京：科学出版社，2010

(中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书)

ISBN 978-7-03-027195-2

I. 华… II. 华… III. ① 数学-文集 ② 多复变函数论-文集 IV. 01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 062697 号

责任编辑：张 扬／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2010 年 5 月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1—3 000 字数：194 000

定价：98.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

纪念华罗庚先生诞辰100周年

《华罗庚文集》编委会

《华罗庚文集》序言

2010 年是著名数学家华罗庚先生诞辰 100 周年. 值此机会, 我们编辑出版《华罗庚文集》, 作为对他的美好纪念.

华罗庚先生是他那个时代的国际领袖数学家之一, 也是中国现代数学的主要奠基人和领导者. 无论是在和平建设时期, 还是在政治动荡甚至是战争年代, 他都抱定了为国家和人民服务的宗旨, 为中国数学的发展倾注了毕生精力, 受到了中国人民的广泛尊敬.

华罗庚先生最初研究数论, 后将研究兴趣拓展至代数和多复变等多个领域, 取得了一系列国际一流的成果, 引领了这些领域的学术发展, 产生了广泛持久的影响. 他从一名自学青年成长为著名数学家, 其传奇经历激励了几代中国数学家投身于数学事业.

华罗庚先生为我们留下了丰富的精神遗产, 包括大量的学术著作和研究论文. 我们认为, 认真研读这些著作和论文, 是深刻把握华罗庚学术思想精髓的最佳途径. 无论对于数学工作者还是青年学生, 其中许多内容都是很有启发和裨益的.

华罗庚先生担任中国科学院数学研究所所长 30 余年, 他言传身教, 培养和影响了一批国际水平的数学家, 他的学术思想和治学精神已经成为数学所文化的核心. 自 2008 年起以中科院数学所为基础成立的中国科学院华罗庚数学重点实验室, 旨在继承和弘扬华罗庚先生的学术思想和治学精神, 积极推动中国数学的发展. 为此, 我们选择华罗庚先生的著作和论文作为实验室的首批出版物, 今后还将陆续推出更多优秀的数学出版物.

在出版《华罗庚文集》的过程中, 我们得到了各方面的关心和支持, 包括国家出版基金的资助, 在此我们表示深深的感谢. 同时, 对于有关人员在策划、翻译和审校等方面付出的辛勤劳动, 对于科学出版社所作的大量工作, 我们表示诚挚的谢意.

中国科学院华罗庚数学重点实验室

《华罗庚文集》编委会

2010 年 3 月

修 订 本 序

作者关于多个复变数的函数论的研究工作可以粗略地分为两个阶段. 前一阶段是从 1949 年到 1955 年, 这一阶段的工作是对典型域上的解析函数论与调和函数论进行研究. 一般说来, 这是一个建立基本理论的阶段. 在研究过程中, 我们引进和制造了一些与其他分支有关的工具 —— 特别是代数和几何方面的工具. 1955 年之后, 我们开始把这些基本理论用到其他方面, 从而发现我们的结果和方法又反过来可用来处理其他领域中的不少问题, 同时也提供新现象、新苗头; 最突出的在群表示论、偏微分方程论等方面.

出版修订本的想法开始于这两个阶段分界的时候, 由于希望多做些应用方面的工作, 使得结果更完整, 因而修订本迟迟未动手, 一等再等, 等了七个年头, 以致根据作者初步修订计划而写的俄文译本和英文译本都先后出版了, 而中文修订本却由于希望更深刻些, 希望更丰富些而长时期不能脱稿.

如以酉群上的 Fourier 级数论为例, 普通的 Fourier 级数是一维酉群 $\{e^{i\theta}\}$ 上的调和分析, 它的文献十分丰富. 在我们获得了酉群上的 Fourier 级数的求和方法之后, 我们自然要问, 普通 Fourier 级数上每条定理在一般酉群上有没有对应的结果? 龚昇提出了 "从和到核" 及 "从核到和" 两个类型的推广方法, 因而建议出很多求和方法. 这些求和方法之间的相互比较、相互关系, 都有待我们进一步探讨.

酉群尚且如此, 就不要说酉群之外的其他紧致群和其他齐性紧致空间了; 更不要说把作者所提出的单变数的广义函数论 [9] 推广到这些对象上去了.

再以偏微分方程为例, 即使把我们的方法用到最简单的场合, 也可以看出其独特之处. 我在中国科学技术大学讲课的时候, 就是运用这个方法来处理调和函数论的. 这些方法的优点不仅提供了处理某些微分方程的方法, 而且还引出了不少有趣的新现象和新实例. 其中包括一些带蜕化面的高维椭圆型方程、空间混合型方程、偏微分方程组和积分方程等等. 以混合型方程来说, 我们就给出了Лаврентьев方程的一个新的处理方法.

根据这些情况, 看来还需要较长的时间和较多的人力才能初步完成第二阶段的一些想法; 另一方面, 即使比较完备了, 但其篇幅也必然很多倍于现在的篇幅. 因此我们不得不满足于把重点仍然放在第一阶段的工作上, 而简略地提一下其他方面.

欢迎大家批评指教, 欢迎青年数学工作者参加到这个研究方向中来. 由于我们在这个方向中要综合地运用数学方面各种基本功, 因而, 对我们来讲, 是一个良好的锻炼园地. 青年读者不妨先尝试一下附录 I 中所提出的练习, 然后入手.

华罗庚

1964 年 6 月 · 北京

序

本书包括了作者对多复变数函数论的一部分系统的研究, 其主要部分先后 (从 1949 年至 1955 年) 发表在我国的 "数学学报" 上 (一些初步报告发表在 "苏联科学院报告" 上). 除综合、改组、增补、修订的工作之外, 还包括了一些新结果.

初稿曾在 1955 年的中国科学院第一次学部会议上书面宣读, 1956 年曾在第三届全苏数学会上宣读.

这一系列的工作在某种意义上可以说是完整的. 但是从 1957 年初, 另外一些线索又在开始发展, 那就是与调和函数有关的、与偏微分方程有关的、与群表示论有关的各方面, 并且已经完成了若干工作. 其中很大一部分是和陆启铿同志合作的. 为了将来再准备出专集, 本书中将不包括与那些有关的部分.

作者尽量设法使本书自给自足, 除掉群表示论的知识以外, 并不需要太多的专门知识.

作者乘此感谢陆启铿同志, 他提了很多意见, 指出了不少应当改善和修正的地方. 龚昇、钟同德二位同志的意见和帮助也使本书有所改进, 一并致谢.

华罗庚

1957 年 5 月 · 北京

目　　录

导　言

§1　典　型　域

本文中所讨论的典型域是指以下的四种域:

第一种是 m 行 n 列的矩阵双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 表示. 它是由 m 行 n 列的复元素矩阵 Z 之适合于条件

$$I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0$$

者所组成, 此处 $I^{(m)}$ 表示 m 行列的单位方阵, $\overline{Z}'$ 表示由 Z 行列互换并取共轭复数所得出的矩阵, 因此它是 n 行 m 列的. 如果 H 是一个 Hermite 方阵, 则以 $H > 0$ 表示 H 是定正的.

第二种是 n 行列的对称方阵的双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\rm II}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素对称方阵 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} - Z\bar{Z} > 0$$

者所组成.

第三种是 n 行列的斜对称方阵的双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素斜对称方阵 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0$$

者所组成.

第四种可以称为 Lie 球双曲空间, 今后以 $\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 表示. 它是由 $n(> 2)$ 维复元素矢量 $z(= (z_1, \cdots, z_n))$ 之适合于诸条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所组成.

这四种域的维数 (复数维) 各为 mn, $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 及 n. 作者曾经证明 (华罗庚 [3]), 最后一种, 也可以表成为 $2 \times n$ 实元素矩阵的双曲空间. 因此这四种域都可以归入作者所研究过的矩阵几何的范畴之中.

1935 年 E. Cartan [1] 曾经算出：可递的不可分解的囿对称域仅有六种可能性. 除以上的四种之外还有两种, 其一是 16 维的某一种空间, 另一是 27 维的某一种空间. 从维数可以看出这两种域是异常特殊的. 后经 A. Borel[1] 指出, 具体有效地定出这两种域还是问题. 因此一般说来, 以上所提出的四种域在具体地研究多变数函数论时, 是有它的特殊重要意义的, 于是仿典型群的名称我们称它们为典型域. 本文的目的就在于具体地研究这些典型域的调和分析问题.

§2 一个域的特征流形

命 $\mathfrak{R}$ 表示由 n 个复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 所形成的 $2n$ 维欧氏空间的一个有界单连通域, 我们已知 $\mathfrak{R}$ 中的一个 $\mathfrak{R}$ 内解析函数 $f(z)$ 一定在 $\mathfrak{R}$ 的边界上取最大绝对值. 命 $\mathfrak{C}$ 表 $\mathfrak{R}$ 的边界上具有以下性质的一部分：(i) 凡 $\mathfrak{R}$ 内解析的函数一定在 $\mathfrak{C}$ 上取最大绝对值; (ii) 对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点 ξ, 我们可以找到一个 $\mathfrak{R}$ 上的解析函数 $f(z)$ 在此点取最大绝对值. 这样的流形 $\mathfrak{C}$ 称为域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形. 有时 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的边界的全部, 一般来说, 是它的一部分, 甚至 $\mathfrak{C}$ 的维数可以大大地低于 $2n-1$. 显然 $\mathfrak{C}$ 是唯一决定的. 不难证明, $\mathfrak{C}$ 是一紧致流形, 并且如果函数 $f(z)$ 在 $\mathfrak{C}$ 已知, 在 $\mathfrak{C}$ 上每点附近解析, 则这函数就唯一决定了. 由此推得流形 $\mathfrak{C}$ 的实维数 $\geqslant n$. 我们以 ξ 表 $\mathfrak{C}$ 上的变数, 并以 $d\xi\overline{d\xi}'$ 及 $\dot{\xi}$ 分别表示流形 $\mathfrak{C}$ 上的微分度量与体积元素. 值得一提的是, 如果我们把 (i), (ii) 中的解析函数换为线性函数, 那么 $\mathfrak{C}$ 的定义似乎仍然一样.

四类典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{III}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 各为

1. $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 是由适合于

$$U\bar{U}'=I$$

的所有 $m\times n$ 矩阵 U 所形成的; 特别, 当 $m=n$ 时, $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 就是所有的酉方阵;

2. $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ 是由所有 n 行列对称酉方阵所形成的;

3. $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 的定义随 n 为奇或为偶而有所不同. 对偶数 n, 它是由所有的 n 行列斜对称酉方阵所形成的; 对奇数 n, 它是由形如

$$UDU'$$

的方阵所形成的, 这儿 U 过所有的酉方阵, 而

$$D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dotplus 0;$$

4. $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 是由以下的矢量

$$e^{i\theta}x$$

所形成的, 这儿

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad xx' = 1.$$

他们的实维数各为 $n^2 - (n-m)^2 = n(2n-m), \frac{1}{2}n(n+1), \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})(n-1)$ 及 n.

这些特征流形都是齐性空间. 更确切些, $\mathfrak{L}$ 上的一点可由 $\mathfrak{R}$ 内某点的稳定群变为 $\mathfrak{L}$ 上的任一点. 齐性空间的调和分析的一般理论已经由 E. Cartan[1], H. Weyl[1] 及 A. Weil[1] 研究过, 但本节中的方法却给出比已知结果更完善、更明确的结果.

§3 直观推导

(所谓直观推导, 是指暂且不管严格性, 先计算出一批结果来, 作为我们进一步严格处理的根据, 如先不管级数及积分的收敛性等.)

假定 $\mathfrak{R}$ 内有一个解析函数系

$$\{\varphi_\nu(z)\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

使 $\mathfrak{R}$ 中每一解析函数 $f(z)$ 都可以表为 $\mathfrak{R}$ 内的收敛级数

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z).$$

我们作两个无穷维的 Hermite 方阵

$$H_1 = \left(\int_{\mathfrak{L}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\dot{\xi}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}$$

及

$$H_2 = \left(\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\dot{z}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\cdots}.$$

这两个方阵能够正交正常化, 使得

$$\int_{\mathfrak{L}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\dot{\xi} = \delta_{\nu\mu}$$

及

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\dot{z} = \lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

这些特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 称为解析不变量, 即它们不依赖于基底 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 的选择, 而且如果有一解析变换把 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathfrak{L}$ 变为 $\mathfrak{R}_1$ 与 $\mathfrak{L}_1$, 则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 是不变的.

对一完全圆形域来说, 这一函数系的存在是有保证的 (H. Cartan[1]).

我们定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}}{\lambda_\nu}=K(z,\bar{w}),$$

这就是 $\mathfrak{R}$ 域的 Bergman 核. 它有重现性质, 即对 $\mathfrak{R}$ 内任一解析函数 $f(z)$ 常有

$$f(z)=\int_{\mathfrak{R}}K(z,\bar{w})f(w)\dot{w}.$$

我们再定义

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)}=H(z,\bar{\xi})$$

为 $\mathfrak{R}$ 域的 Cauchy 核. 函数系 $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ 在 $\mathfrak{L}$ 上的连续函数所成的空间是不完整的, 它也有重现性质: 如果 $f(z)$ 是 $\mathfrak{R}$ 内任一解析函数, 而且在 $\mathfrak{L}$ 上有展式

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(\xi),$$

则得

$$f(z)=\int_{\mathfrak{L}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}.$$

再命

$$f(z)=u(z)H(z,\bar{w}),$$

则得

$$u(z)=\int_{\mathfrak{L}}\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{w})}{H(z,\bar{w})}u(\xi)\dot{\xi}.$$

我们定义

$$P(z,\xi)=\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})}$$

为域 $\mathfrak{R}$ 的 Poisson 核, 这核是定正的.

我们把函数系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,1,2,\cdots}$$

扩充成为一个 $\mathfrak{L}$ 上的正交正常完备系

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}_{\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots},$$

把 $P(z,\xi)$ 展为 $\varphi_\nu(\xi)$ 的 Fourier 级数, 即

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Phi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)},\quad \Phi_\nu(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\varphi_\nu(\xi)\dot{\xi}.$$

如果我们有

$$\lim_{z\to\xi}\Phi_\nu(z)=\varphi_\nu(\xi),$$

则对 $\mathfrak{L}$ 上的任一有 Fourier 展式

$$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu(\xi),\quad c_\nu=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\varphi(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\dot{\xi}$$

的函数 $\left(\text{此处 } V(\mathfrak{L})=\int_{\mathfrak{L}}\dot{\xi}\right)$, 我们有一函数类

$$\Phi(z)=\int_{\mathfrak{L}}P(z,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu\Phi_\nu(z).$$

我们定义这样的函数是域 $\mathfrak{R}$ 的调和函数.

通常的调和函数是由二阶偏微分方程定义的, 我们也有以下的直算法. 从 Bergman 的核我们可以定义域 $\mathfrak{R}$ 的 Riemann 度量

$$d\bar{d}\log K(z,\bar{z})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\log K(z,\bar{z})dz_id\bar{z}_j=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}dz_id\bar{z}_j,$$

它对应的逆变张量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$$

是这个空间的 Laplace 算子. 于是我们也有其对应的 Dirichlet 问题等等.

在引进合适的条件之下, 以上的直算法是可以严格化的. 本书的绝大部分就是在典型域中把这些结果更具体化及严格地表达出来.

§4　关于所用方法的介绍

(a) 群表示论方面的工具　已知这四类典型域都是完整圆型域. 对于一个完整圆型域, 我们可以做包含它的原点的稳定群, 这个群是由线性变换

$$w=zU$$

形成的, 这儿 U 是酉方阵. 这个群以 Γ_0 表示. 所有由 $z_1,\cdots,z_n$ 形成的单项式成为 $\mathfrak{R}$ 域的解析函数的一个基底. 不同次数的多项式都相互正交, 所以我们的主题是把同一方次的多项式分解为互相正交正常的系. 更确切些, 命 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 及 $z^{[l]}$ 表示由支量

$$z_1^{l_1}\cdots z_n^{l_n}\sqrt{\frac{l!}{l_1!\cdots l_n!}},\quad l=l_1+\cdots+l_n$$

形成的矢量, 这是一个

$$\frac{1}{l!}n(n+1)\cdots(n+l-1)$$

维的矢量. 当 $w=zU$ 时, 我们得出一个变换

$$w^{[l]}=z^{[l]}U^{[l]},$$

这儿 $U^{[l]}$ 表示方阵 U 的 Kronecher 幂积. 为了找出 $z^{[l]}$ 的正交支量, 必须把 $U^{[l]}$ 分解为不可分解的子方阵的直和. 这建议了线性群表示论中的以下一些问题.

从 n 行列的一般线性群 GL_n 出发, 命 $f_1,\cdots,f_n$ 代表 n 个整数, 并适合于

$$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0.$$

对 GL_n 中的一个元素 X, 在 GL_n 的标签为 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的表示法中, 有对应元素

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(X),$$

它的行列数通常用 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 表示, 我们已经知道, 它是一个不可分解的表示法. 如又有一个群 GL_N 的表示法

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(Y),$$

显然

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(A_{f_1,\cdots,f_n}(X))$$

仍然是 GL_n 的一种表示法. 我们现在所提的问题是以上的群表示可以分解为那些不可分解的直和. 这个一般性的问题本身是一个有趣的代数问题, 本文中未能完全地解决它. 但侥幸的是本文所用到的一些特例①确已完满地解决了.

(b) 方阵的极坐标 在运用群表示的方法获得了正交系之后, 我们又遇到另一个困难问题, 就是具体地算出正常化系数的问题 (对 $\mathfrak{L}$ 的问题比对 $\mathfrak{R}$ 的问题容易些). 为了这个目的, 在进行具体计算时, 引进了一个工具, 我们称它为方阵的极坐标. 例如, 我们已知任意一个 n 阶的复元素的对称方阵 Z 可以表成为

$$Z=U\Lambda U'$$

(华罗庚 [1]), 此处 U 表示酉方阵, Λ 表示对角线方阵, 其对角线上的元素是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 且适合于 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$. 命 $\{\mathfrak{U}\}$ 表酉群对其子群 $[\pm1,\cdots,\pm1]$ 的傍系, 则一般说来, 一对称方阵 Z 与 $\{\mathfrak{U}\}$ 中的一元素及一个 Λ 是一一对应的. 这方

① 在作者获得这些结果以后, 段学复教授指出, Thrall (Thrall[1]) 也曾得出这一结果, 但他所用的方法与本书中所用的方法完全不同, 特此致谢.

阵 A 可以称为 Z 的向径部分, 而 U 可以称为辐角部分. 关于由 Z 到它的极坐标之间的具体计算关系 (如函数行列式等), 在本文中都已算出. 本文中并列出若干虽与本文主题无直接关系但属于同一范畴的一些与矩阵极坐标有关的运算.

(c) 积分的具体算出　一些积分的具体算出也是本文中的一个环节, 例如我们算出了所有的四种域的欧几里得体积, 这些公式不在绪言中一一枚举. 但我们必须提出其中的一个, 即我们算出了: 当 $\alpha > -1, \alpha+\beta > -n$ 时,

$$\int_{\mathfrak{R}_{\rm IV}} (1-\bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^{\alpha}(1-\bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2})^{\beta}\dot{z}$$
$$= \frac{\pi^n \Gamma(\alpha+1)}{2^{n-1}(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha+n)}.$$

从这一积分可以得到: 当 $\lambda < 1$ 时,

$$\int_{\mathfrak{R}_{\rm IV}} (1-2\bar{z}z' + |zz'|^2)^{-\lambda}\dot{z} = \frac{\pi^n\Gamma(1-\lambda)}{2^{n-1}(n-2\lambda)\Gamma(n-\lambda)}.$$

这解决了作者在 1946 年提出的一个问题, 即在 $\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 域中 Poincaré 级数的收敛指数 $\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$, 并且这是最好的结果.

§5　在群表示论上的应用

以上几节曾说明过, 我们把群表示论作为工具来研究多复变函数论. 现在又反过来把我们获得的结论用到群表示论上去, 从而得到一些深刻的结果.

我们把 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ $(m=n)$ 上的调和函数说得更详细些. $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 的 Laplace 方程是

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{n} z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n}\bar{z}_{j\gamma}z_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\partial\bar{z}_{k\beta}} = 0.$$

在 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 的闭包上适合这个微分方程的函数 $u(Z)$ 称为 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 的调和函数. 在 $\mathfrak{C}_{\rm I}$ 有连续边界值的函数成一函数类, 以 ξ 表之. $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 上的 Dirichlet 问题的解答如下 ($\mathfrak{C}_{\rm I}$ 就是酉群):

在酉群 $\mathfrak{C}_{\rm I}$ 上给一个连续函数 $\varphi(U)$, 有一个而且只有一个调和函数, 由 Poisson 公式

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\det(I-Z\bar{Z}')^n}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}}\varphi(U)\dot{U}$$

给出, 而且

$$\lim_{Z\to U} u(Z) = \varphi(U).$$

Poisson 核

$$\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\frac{\det(I-Z\bar{Z}')^n}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}}$$

的展开式如下：命

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U)=(a_{ij}^f(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)}.$$

函数系

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{L})}}a_{ij}^f(U),\quad i,j=1,2,\cdots,N(f),$$

$$+\infty>f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n>-\infty$$

成一酉群上的正常正交系. Poisson 核可以写成为

$$\sum_f\sum_{i,j}\Phi_{ij}^f(Z)\overline{\varphi_{ij}^f(U)},$$

而且

$$\lim_{Z\to U}\Phi_{ij}^f(Z)=\varphi_{ij}^f(U).$$

对任一连续函数 $\varphi(U)$, 我们有一 Fourier 级数

$$\sum_f\sum_{i,j}C_{ij}^f\varphi_{ij}^f(U),\quad C_{ij}^f=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\varphi(U)\overline{\varphi_{ij}^f(U)}\dot{U}.$$

但这级数可能是不收敛的, 或者不收敛于 $\varphi(U)$, 我们有

$$\varphi(U)=\lim_{Z\to U}\sum_f\sum_{ij}C_{ij}^f\Phi_{ij}^f(Z).$$

它可以定义为以上的 Fourier 级数的 Abel 和, 因此, 我们有以下的定理：酉群上连续函数的 Fourier 级数可以 A 求和收敛于这个函数.

因此推出任意有限紧致群上的逼近定理及齐性空间的逼近定理. 这些结果显然比以前的结果明确 (Peter-Weyl[1], Weyl[1]).

我们再加几个附记：

可以阐明，以往所提的 ξ 的调和函数也适合于 n^2 个偏微分方程的一个方程组：

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^n\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{k=1}^n\bar{z}_{k\alpha}z_{k\beta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{z}_{i\alpha}\partial z_{j\beta}}=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

这是一个珍异现象. 这建议有时一个偏微分方程的解一定可以适合一组偏微分方程.

又级数

$$\sum_{f}\sum_{i,j} c_{ij}^{f} \Phi_{ij}^{f}(Z)$$

的收敛范围有时可能并不限于 $\Re_{\mathrm{I}}$ 之中. 如果在 $\Re_{\mathrm{I}}$ 之外有一部分收敛, 该处 Laplace 方程不是椭圆型的, 则这个级数就成为一个混合型偏微分方程的解了.

第一章　若干代数工具

§1.1　代数恒等式

假定 $n \geqslant 2$, 命

$$D(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j).$$

定理 1.1.1　我们有恒等式

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \delta_{i_1, \cdots, i_n}^{1, \cdots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_n}^2)}$$
$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}, \tag{1.1.1}$$

此处 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 乃由 $1, 2, \cdots, n$ 之排列而得. 若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的偶排列, 则 $\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}^{1, 2, \cdots, n} = 1$; 若是奇排列, 则 $\delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}^{1, 2, \cdots, n} = -1$.

定理 1.1.2　命 $\nu = \left[\frac{1}{2} n\right]$, 我们有恒等式

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \delta_{i_1, \cdots, i_n}^{1, \cdots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_{2\nu}})}$$
$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)}. \tag{1.1.2}$$

在证明以上两个代数恒等式的时候, 我们需要一些与 Vandermonde 行列式有关的不难证明的结果. 习知

$$D(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.1.3}$$

命 $D_i = D(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n)$, 不难证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \cdots, x_n), & \text{若 } l = 0, \\ 0, & \text{若 } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n, & \text{若 } l = n. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

又由

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{1-x_1}, & \dfrac{x_2}{1-x_2}, & \cdots, & \dfrac{x_n}{1-x_n} \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ x_1(1-x_1), & x_2(1-x_2), & \cdots, & x_n(1-x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}(1-x_1), & x_2^{n-1}(1-x_2), & \cdots, & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1+\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n),
\end{aligned}$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1-x_i} = (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.1.5}$$

在此式中换 x_i 为 $-x_i$, 可知

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1+x_i} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.1.6}$$

将 (1.1.4) 式中 $l = 0$ 时的等式与 (1.1.5) 式相加, 可得

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1-x_i} = D(x_1, \cdots, x_n) \left\{ 1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} \right\}. \tag{1.1.7}$$

也易得

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1+x_i} = D(x_1, \cdots, x_n) \left\{ 1 - \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right\}. \tag{1.1.8}$$

根据这些结果, 我们现在去证明定理 1.1.1 及定理 1.1.2.

定理 1.1.1 的证明. 当 $n=2$ 时, (1.1.1) 式之左为

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2x_2^2)}-\frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}$$
$$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1^2)(1-x_1x_2)(1-x_2^2)}=\frac{D(x_1,x_2)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2}(1-x_ix_j)},$$

故当 $n=2$ 时定理成立. 今用归纳法证明本定理, 假定 $n-1$ 时定理成立, 则有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2\cdots x_{i_n}^2)}$$
$$=\sum_{a=1}^n(-1)^{n-a}\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2\cdots x_{\alpha}^2)}$$
$$=\sum_{a=1}^n(-1)^{n-a}\frac{x_1\cdots x_n}{x_a(1-x_1^2\cdots x_n^2)}\times$$
$$\times\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-2}x_{i_2}^{n-3}\cdots x_{i_{n-2}}^1}{(1-x_{i_1}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2\cdots x_{i_{n-1}}^2)}$$
$$=\sum_{a=1}^n(-1)^{n-a}\frac{x_1\cdots x_n}{x_a(1-x_1^2\cdots x_n^2)}\cdot\frac{D(x_1,\cdots,x_{a-1},x_{a+1},\cdots,x_n)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i\neq a,j\neq a}}(1-x_ix_j)}$$
$$=\frac{1}{(1-x_1^2\cdots x_n^2)\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\sum_{a=1}^nD_a\prod_{i=1}^n(1-x_ix_a).\tag{1.1.9}$$

因为

$$\prod_{i=1}^n(1-x_ix_a)=\sum_{l=0}^n\sigma_lx_a^l,$$

此处诸 σ_l 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的初等对称函数, 由 (1.1.4) 式可知

$$\sum_{a=1}^nD_a\prod_{i=1}^n(1-x_ix_a)=\sum_{a=1}^nD_a\sum_{l=0}^n\sigma_lx_a^l=\sum_{l=0}^n\sigma_l\sum_{a=1}^nD_ax_a^l$$
$$=D(x_1,\cdots,x_n)+(-1)^nx_1\cdots x_n\cdot(-1)^{n-1}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n$$
$$=D(x_1,\cdots,x_n)(1-x_1^2\cdots x_n^2).$$

将上面的结果代入 (1.1.9) 式, 即得定理 1.1.1.

定理 1.1.2 的证明. 当 $n=2$ 时, (1.1.2) 式显然成立. 今用归纳法证明本定理, 假定当 $n-1$ 时定理成立, 则有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots(1-x_{i_1}\cdots x_{i_{2\nu}})}$$
$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots}$$
$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1\cdots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)}\times$$
$$\times\sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-2}\cdots x_{i_{n-2}}^1}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots},\tag{1.1.10}$$

此处 ε 的定义如下：若 n 是奇数, 则 $\varepsilon=0$; 若 n 是偶数, 则 $\varepsilon=1$, 由归纳法的假定, 内和等于

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_{a-1},x_{a+1},\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2}.$$

代入 (1.1.10) 式, 可知 (1.1.2) 式之左方等于

$$\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1\cdots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)}\cdot\frac{D(x_1,\cdots,x_{a-1},x_{a+1},\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2}$$
$$=\frac{1}{(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1-x_a^2}\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)$$
$$=\frac{1}{(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_ax_a^l}{1-x_a^2}.\tag{1.1.11}$$

今分三种情形讨论 (1.1.11) 式之内和:

1) l 是奇数, 由于

$$\frac{x_a-x_a^l}{1-x_a^2}=x_a(1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-3}),$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=x_a(1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-3})-\frac{1}{2}\left(\frac{x_a}{1-x_a}+\frac{x_a}{1+x_a}\right).$$

利用 (1.1.4), (1.1.5) 及 (1.1.6) 可知

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{x_a}{1+x_a}+\frac{x_a}{1-x_a}\right)D_a$$
$$=\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}+\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}.\quad(1.1.12)$$

2) 当 l 是正偶数时, 由于

$$\frac{1-x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-2},$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right).$$

利用 (1.1.4), (1.1.7) 及 (1.1.8) 可知

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=-\sum_{a=1}^{n}D_a+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a$$
$$=-D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)$$
$$\times\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{x_1\cdots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}+1-\frac{x_1\cdots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}.\quad(1.1.13)$$

3) 当 $l=0$ 时有

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a$$
$$=D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}.\quad(1.1.14)$$

由 (1.1.12), (1.1.13) 及 (1.1.14) 可知

$$\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=D(x_1,\cdots,x_n)$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}\sum_{\substack{l=1\\2|l}}^{n}\sigma_l$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}+\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}\sum_{\substack{l=1\\2\nmid l}}^{n}\sigma_l$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)x_1\cdots x_n\times$$

$$\times\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l+\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l\right\}$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)\left\{1+\frac{1}{2}x_1\cdots x_n((-1)^{n-1}-1)\right\},\tag{1.1.15}$$

易知 $(-1)^{n-1}-1=-2\varepsilon,\varepsilon$ 的定义如前. 将 (1.1.15) 代入 (1.1.11), 得

$$\frac{1}{(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\cdot D(x_1,\cdots,x_n)(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}.$$

定理 1.1.2 证完.

附记　和 (1.1.1) 及 (1.1.2) 相仿, 我们有下列恒等式:

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1})(1-x_{i_1}x_{i_2})\cdots(1-x_{i_1}\cdots x_{i_n})}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}.\tag{1.1.16}$$

因为在本文中并不用它，所以证明从略.

我们还需要以下的较容易的恒等式.

定理 1.1.3

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1,\cdots,x_n)D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(x_i+y_j)}. \tag{1.1.17}$$

证　从第二行, 第三行, ……, 第 n 行中各减去第一行, 且利用等式

$$\frac{1}{x_l+y_k}-\frac{1}{x_1+y_k}=\frac{x_1-x_l}{(x_1+y_k)(x_l+y_k)},\quad l=2,\cdots,n,\quad k=1,\cdots,n,$$

可知上面的行列式等于

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_1+y_k)}\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \dfrac{1}{x_2+y_1}, & \dfrac{1}{x_2+y_2}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1}, & \dfrac{1}{x_n+y_2}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}. \tag{1.1.18}$$

由第二列, 第三列, ……, 第 n 列中各减去第一列, 则 (1.1.18) 之行列式等于

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)\cdots(y_1-y_n)}{\prod\limits_{j=2}^{n}(x_j+y_1)}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_2+y_2}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_2}, & \cdots, & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

由归纳法, 得出本定理.

以 $-x_1^{-1},\cdots,-x_n^{-1}$ 代替上面定理中的 $x_1,\cdots,x_n$ 并略加变化, 可得

定理 1.1.4

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1-x_1y_1}, & \cdots, & \dfrac{1}{1-x_1y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{1-x_ny_1}, & \cdots, & \dfrac{1}{1-x_ny_n} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1,\cdots,x_n)D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

§1.2　关于幂级数与 Fourier 级数的恒等式

定理 1.2.1　命

$$f_i(z)=\sum_{-M\leqslant\nu\leqslant N}a_\nu^{(i)}z^\nu, \tag{1.2.1}$$

这儿 M,N 可以是有限的, 也可以是无穷的. 但在出现无穷的时候, 我们必须假定 (1.2.1) 的收敛性, 例如 z 在一区域 $\mathscr{D}$ 内绝对收敛. 于是当 $z_1,\cdots,z_n$ 都在 $\mathscr{D}$ 内时, 我们有以下的恒等式

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix} = \sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M} \begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^{l_1}, & \cdots, & z_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n^{l_1}, & \cdots, & z_n^{l_n} \end{vmatrix}. \tag{1.2.2}$$

证　由行列式的展开法可知, 此式的左边等于

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n} f_{i_1}(z_1)\cdots f_{i_n}(z_n) \\ =&\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n} \sum_{-M\leqslant\nu_1,\cdots,\nu_n\leqslant N} a_{\nu_1}^{(i_1)}\cdots a_{\nu_n}^{(i_n)} z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n} \\ =&\sum_{-M\leqslant\nu_1,\cdots,\nu_n\leqslant N}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n} a_{\nu_1}^{(i_1)}\cdots a_{\nu_n}^{(i_n)}\right) z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n} \\ =&\sum_{-M\leqslant\nu_1,\cdots,\nu_n\leqslant N} \begin{vmatrix} a_{\nu_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{\nu_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{\nu_n}^{(n)} \end{vmatrix} z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n} \\ =&\sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M} \begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} \sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n} z_1^{l_{i_1}}\cdots z_n^{l_{i_n}}, \end{aligned}$$

由行列式的定义即得出本定理.

定理 1.2.2　命

$$f(z)=\sum_{-M\leqslant\nu\leqslant N} a_\nu z^\nu, \tag{1.2.3}$$

如果 x_jy_k 都在 $\mathscr{D}$ 中, 则有以下的恒等式

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} f(x_1y_1), & \cdots, & f(x_1y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_ny_1), & \cdots, & f(x_ny_n) \end{vmatrix} = \sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M} a_{l_1}\cdots a_{l_n} \\ &\times \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

取 $f(z) = (1-z)^{-1}$, 因而得出以下的公式:

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (1-x_1y_1)^{-1}, & \cdots, & (1-x_1y_n)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-x_ny_1)^{-1}, & \cdots, & (1-x_ny_n)^{-1}\end{vmatrix}. \tag{1.2.5}$$

由定理 1.1.4, 此式等于

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

在 (1.2.5) 式中命 $x_n=0$, 则凡 $l_n>0$ 的项都等于 0, 因此得出

$$\sum_{l_1>\cdots>l_{n-1}\geqslant 0}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_{n-1}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & y_n^{l_{n-1}} \\ 1, & \cdots, & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_{n-1})x_1\cdots x_{n-1}D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

换 l_i 为 l_i+1, 则得

$$\sum_{l_1>\cdots>l_{n-1}\geqslant 0}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_{n-1}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1^{l_1+1}, & \cdots, & y_n^{l_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_{n-1}+1}, & \cdots, & y_n^{l_{n-1}+1} \\ 1, & \cdots, & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_{n-1})D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

再命 $x_{n-1}=0$ 等等, 续行此法可得

定理 1.2.3　命 $n \geqslant m > 0$, 则当 $|x_\nu| < 1, |y_\nu| < 1$ 时

$$\sum_{l_1 > \cdots > l_m \geqslant 0} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_m^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_m}, & \cdots, & x_m^{l_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+n-m}, & \cdots, & y_n^{l_1+n-m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_m+n-m}, & \cdots, & y_n^{l_m+n-m} \\ y_1^{n-m-1}, & \cdots, & y_n^{n-m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1, & \cdots, & y_n \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_m) D(y_1, \cdots, y_n)}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}. \tag{1.2.6}$$

以后将要用到下面的求极限的定理.

定理 1.2.4　命 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 是 n 个具有高次微商的函数, 以下用到几次就有几次, 则得

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x}} \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2! \cdots (n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{1.2.7}$$

证　并不失其普遍性可以假定 $x_1, \cdots, x_n$ 所趋的极限是 0. 定理的证明可以由有剩余项的戴劳展开式得出.

附记　在较强的条件下, 例如若 $f_i(z)$ 是解析函数, 则本定理乃是定理 1.2.1 的引伸.

命 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0$ 表 n 个整数且

$$M_{f_1, \cdots, f_n}(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{f_1+n-1}, & \cdots, & x_n^{f_1+n-1} \\ x_1^{f_2+n-2}, & \cdots, & x_n^{f_2+n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{f_n}, & \cdots, & x_n^{f_n} \end{vmatrix}, \tag{1.2.8}$$

或简单地写成为 $M_f(x_1, \cdots, x_n)$. 显然有

$$M_{0, \cdots, 0}(x_1, \cdots, x_n) = D(x_1, \cdots, x_n).$$

命

$$N(f_1,\cdots,f_n)=\lim_{\substack{x_1\to 1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to 1}}\frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)},\tag{1.2.9}$$

由定理 1.2.4 可知

$$N(f_1,\cdots,f_n)=\frac{D(f_1+n-1,f_2+n-2,\cdots,f_{n-1}+1,f_n)}{D(n-1,n-2,\cdots,1,0)}.\tag{1.2.10}$$

定理 1.2.5　在定理 1.2.2 的假定下, 我们有恒等式

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} f(x_1), & \cdots, & f(x_n)\\ f'(x_1), & \cdots, & f'(x_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f^{(n-1)}(x_1), & \cdots, & f^{(n-1)}(x_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{N\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M}a_{l_1}\cdots a_{l_n}N(f_1,\cdots,f_n)M_f(x_1,\cdots,x_n).\tag{1.2.11}$$

证　这是定理 1.2.2 与定理 1.2.4 的综合.

定理 1.2.6　命

$$g(\theta)=\sum_{-M\leqslant\nu\leqslant N}a_\nu e^{i\nu\theta},\tag{1.2.12}$$

这儿 M,N 可以是有限的或无穷的. 但出现无穷时, 必须假定 (1.2.12) 的收敛性及有多阶连续微商. 于是有恒等式

$$\frac{(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} g(\theta_1), & \cdots, & g(\theta_n)\\ g'(\theta_1), & \cdots, & g'(\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & g^{(n-1)}(\theta_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{N_1\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant -M}a_{l_1}\cdots a_{l_n}N(f_1,\cdots,f_n)M_f(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}).\tag{1.2.13}$$

证　在定理 1.2.5 中取 $z=xe^{i\theta}$, 且命

$$f(e^{i\theta})=g(\theta),$$

则

$$g'(\theta)=if'(e^{i\theta})e^{i\theta}=i\frac{\partial}{\partial x}f(xe^{i\theta})|_{x=1}$$
$$g''(\theta)=i^2f''(e^{i\theta})e^{2i\theta}+i^2f'(e^{i\theta})e^{i\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&= i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1} + i^2 \frac{\partial}{\partial x} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}, \\
g'''(\theta) &= i^3 f'''(e^{i\theta})e^{3i\theta} + 3i^3 f''(e^{i\theta})e^{2i\theta} + i^3 f'(e^{i\theta})e^{i\theta} \\
&= i^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1} + 3i^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1} + i^3 \frac{\partial}{\partial x} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

即 $g^{(l)}(\theta)$ 是

$$
\frac{\partial^l}{\partial x^l} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}
$$

的线性组合而且 $\frac{\partial^l}{\partial x^l} f(xe^{i\theta})\Big|_{x=1}$ 的系数等于 i^l. 因此

$$
\begin{aligned}
&\left|\begin{matrix}
f(x_1e^{i\theta_1}), & \cdots, & f(x_ne^{i\theta_n}) \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1e^{i\theta_1}), & \cdots, & \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_ne^{i\theta_n}) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1^{n-1}} f(x_1e^{i\theta_1}), & \cdots, & \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_n^{n-1}} f(x_ne^{i\theta_n})
\end{matrix}\right|_{x_1=1,\cdots,x_n=1} \\
&= i^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left|\begin{matrix}
g(\theta_1), & \cdots, & g(\theta_n) \\
g'(\theta_1), & \cdots, & g'(\theta_n) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
g^{(n-1)}(\theta_1), & \cdots, & g^{(n-1)}(\theta_n)
\end{matrix}\right|,
\end{aligned}
$$

所以由定理 1.2.5 推出定理 1.2.6.

§1.3 续　　前

定理 1.3.1　假定 $1 \leqslant m \leqslant n$, 当 $|x_\nu| < 1$ $(\nu = 1, \cdots, m)$ 时,

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^m (1-x_i)\right)^{-\rho-n+1} = C_\rho \sum_{l_1 > \cdots > l_m \geqslant 0} & a_{l_1+n-m} \cdots a_{l_m+n-m} N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0) \\
& \times \frac{M_{f_1,\cdots,f_m}(x_1, \cdots, x_m)}{D(x_1, \cdots, x_m)}, \qquad (1.3.1)
\end{aligned}
$$

此处

$$
\begin{aligned}
&l_1 = f_1 + m - 1, \cdots, l_{m-1} = f_{m-1} + 1, l_m = f_m, \\
&a_l = \Gamma(\rho + l)/[\Gamma(\rho)\Gamma(l+1)], C_\rho^{-1} = a_{n-m} \cdots a_{n-1}.
\end{aligned}
$$

证　1) 假定 $m=n$. 在定理 1.2.2 中取

$$f(z)=(1-z)^{-\rho},$$

可知当 $|x_iy_j|<1$ 时有恒等式

$$\begin{vmatrix} (1-x_1y_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_1y_n)^{-\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-x_ny_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_ny_n)^{-\rho} \end{vmatrix} = \sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\cdots a_{l_n}$$

$$\times \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

除以 $D(y_1,\cdots,y_n)$, 命 $y_1\to 1,\cdots,y_n\to 1$, 由定理 1.2.4 可知

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\cdots \\ y_n\to 1}} \frac{\begin{vmatrix} (1-x_1y_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_1y_n)^{-\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-x_ny_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_ny_n)^{-\rho} \end{vmatrix}}{D(y_1,\cdots,y_n)} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}$$

$$\times \begin{vmatrix} (1-x_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_n)^{-\rho} \\ \rho(1-x_1)^{-\rho-1}x_1, & \cdots, & \rho(1-x_n)^{-\rho-1}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-2)(1-x_1)^{-\rho-n+1}x_1^{n-1}, & \cdots, & \rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-2)(1-x_n)^{-\rho-n+1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\rho^{n-1}(\rho+1)^{n-2}\cdots(\rho+n-2)}{1!2!\cdots(n-1)!}\left\{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-\rho}\right\}$$

$$\times D\left(\frac{x_1}{1-x_1},\cdots,\frac{x_n}{1-x_n}\right) = a_0a_1\cdots a_{n-1}D(x_1,\cdots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-\rho-n+1};$$

因此得出

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{-\rho-n+1}$$

$$= \frac{1}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\cdots a_{l_n}N(f_1,\cdots,f_n)\frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}. \quad (1.3.2)$$

2) 假定 $m<n$. 在 (1.3.2) 式中命 $x_n=0$, 则凡 $l_n>0$ 的项都等于 0; 因此得出

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1} = \frac{1}{a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l_1>\cdots>l_{n-1}>0} a_{l_1}\cdots a_{l_{n-1}}$$

$$\times N(f_1,\cdots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\cdots,f_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}.$$

将足标 l_ν 换为 $l_\nu+1$, 可得

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l_1>\cdots>l_{n-1}\geqslant 0}a_{l_1+1}\cdots a_{l_{n-1}+1}$$
$$\times N(f_1,\cdots,f_{n-1},0)\times\frac{M_{f_1,\cdots,f_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}.$$

再命 $x_{n-1}=0$ 等等, 续行此法可得定理.

定理 1.3.2 命 $|x|<1,|x_k|<1(k=1,2,\cdots,n)$, 我们有恒等式

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}M_{2f_1,\cdots,2f_n}(x_1,\cdots,x_n)x^{f_1+\cdots+f_n}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)}.$$

证 此式的左边等于

$$\begin{aligned}&\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2\cdots,i_n}x_{i_1}^{2f_1+n-1}x_{i_2}^{2f_2+n-2}\cdots x_{i_n}^{2f_n}x^{f_1+\cdots+f_n}\\ =&\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2\cdots,i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}(xx_{i_1}^2)^{f_1}\cdots(xx_{i_n}^2)^{f_n}\\ =&\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-xx_{i_1}^2)(1-x^2x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x^nx_{i_1}^2\cdots x_{i_n}^2)},\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

此处用了以下的公式：若 $|a_\nu|<1$, 则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\cdots a_n^{f_n}=\frac{1}{(1-a_1)(1-a_1a_2)\cdots(1-a_1a_2\cdots a_n)}.\tag{1.3.4}$$

此式之证明十分简单，可用归纳法证之如此：命 $g_i=f_i-f_n(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\cdots a_n^{f_n}=\sum_{g_1\geqslant\cdots\geqslant g_{n-1}\geqslant 0}a_1^{g_1}\cdots a_{n-1}^{g_{n-1}}\sum_{f_n=0}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{f_n};$$

因此可得 (1.3.4).

在定理 1.1.1 中, 用 $\sqrt{x}x_i$ 代 x_i, 则得公式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}(\sqrt{x})^{\frac12 n(n-1)}}{(1-xx_{i_1}^2)\cdots(1-x^nx_{i_1}^2\cdots x_{i_n}^2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}n(n-1)} D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)}. \tag{1.3.5}$$

以此代入 (1.3.3) 式, 即得定理 1.3.2.

定理 1.3.3 命 $\nu = \left[\frac{1}{2}n\right]$. 当 $|x| < 1, |x_k| < 1 (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 我们有恒等式

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_\nu \geqslant 0} M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \cdots}(x_1, \cdots, x_n) x^{f_1 + \cdots + f_\nu} = \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)}. \tag{1.3.6}$$

若 n 是奇数, 则 $M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \cdots}$ 的最后一个足码是 0.

证 (1.3.6) 式的左边等于

$$\begin{aligned} &\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_\nu \geqslant 0} \sum_{i_1, \cdots, i_n} \delta^{1, 2, \cdots, n}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} x_{i_1}^{f_1 + n - 1} x_{i_2}^{f_2 + n - 2} \cdots x_{i_n}^{f_n} x^{f_1 + \cdots + f_\nu} \\ = &\sum_{i_1, \cdots, i_n} \delta^{1, 2, \cdots, n}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1} \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_\nu \geqslant 0} (x x_{i_1} x_{i_2})^{f_1} (x x_{i_3} x_{i_4})^{f_2} \cdots \\ = &\sum_{i_1, \cdots, i_n} \delta^{1, 2, \cdots, n}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1} / (1 - x x_{i_1} x_{i_2})(1 - x^2 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots, \end{aligned}$$

由定理 1.1.2 可知此式等于

$$\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)}.$$

定理 1.3.4 当 $|x| < 1$, $|x_k| < 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 时,

$$\sum_{f=0}^{\infty} M_{f, 0, \cdots, 0}(x_1, \cdots, x_n) x^f = \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - x x_i)}.$$

证 上式左边等于

$$\sum_{f=0}^{\infty} \begin{vmatrix} (x_1 x)^f x_1^{n-1}, & x_1^{n-2}, & \cdots, & x_1, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n x)^f x_n^{n-1}, & x_n^{n-2}, & \cdots, & x_n, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{x_1^{n-1}}{1 - x x_1}, & x_1^{n-2}, & \cdots, & x_1, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{x_n^{n-1}}{1 - x x_n}, & x_n^{n-2}, & \cdots, & x_n, & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - x x_i)}.$$

定理 1.3.5　我们有恒等式

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)!}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$
$$=(1-x_1-\cdots-x_n)^{-1}D(x_1,\cdots,x_n).$$

证　在定理 1.2.2 中取

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}=e^z,$$

得出

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{x_1y_1}, & \cdots, & e^{x_1y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{x_ny_1}, & \cdots, & e^{x_ny_n}\end{vmatrix}.$$

由于

$$(f_1+\cdots+f_n)!=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{f_1+\cdots+f_n}\mathrm{d}t,$$

故得

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)!}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}n(n-1)}e^{-t}\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix} (x_1t)^{l_1}, & \cdots, & (x_nt)^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_1t)^{l_n}, & \cdots, & (x_nt)^{l_n}\end{vmatrix}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}n(n-1)}e^{-t}\begin{vmatrix} e^{x_1y_1t}, & \cdots, & e^{x_1y_nt}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{x_ny_1t}, & \cdots, & e^{x_ny_nt}\end{vmatrix}\mathrm{d}t.$$

由于

$$\lim_{y_\nu\to 1}\frac{1}{D(y_1,\cdots,y_n)}\begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}=\frac{D(l_1,\cdots,l_n)}{(n-1)!(n-2)!\cdots 1!}$$

及定理 1.2.4 可知

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac12 n(n-1)}\int_0^\infty t^{-\frac12 n(n-1)}e^{-t}\begin{vmatrix} e^{x_1 t}, & \cdots, & e^{x_n t} \\ x_1te^{x_1t}, & \cdots, & x_nte^{x_nt} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_1t)^{n-1}e^{x_1t}, & \cdots, & (x_nt)^{n-1}e^{x_nt}\end{vmatrix}\mathrm{d}t$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)\int_0^\infty e^{-t+(x_1+\cdots+x_n)t}\mathrm{d}t$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)/(1-x_1-\cdots-x_n).$$

在定理 1.3.5 中, 命 $x_1\to x,\cdots,x_n\to x$, 并利用定理 1.2.4, 即得

定理 1.3.6　我们有恒等式

$$\sum_{l_n=0}^\infty\cdots\sum_{l_1=0}^\infty\frac{\left(l_1+\cdots+l_n-\dfrac12 n(n-1)\right)!}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)^2x^{l_1+\cdots+l_n}$$
$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!x^{\frac12 n(n-1)}/(1-nx).$$

比较系数即得

$$\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=m\\ l_\nu\geqslant 0}}\frac{D(l_1,\cdots,l_n)^2}{l_1!\cdots l_n!}=\frac{n^{m-\frac12 n(n-1)}}{\left(m-\dfrac12 n(n-1)\right)!}n!(n-1)!\cdots 1!. \tag{1.3.7}$$

§1.4　关于 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 的若干恒等式

本节中将引进若干与 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 有关的恒等式, 这些恒等式是 §1.5 的恒等式的特例. 从这些恒等式读者就易于了解获得 §1.5 恒等式的构思过程了.

定理 1.4.1　若 $n\geqslant m>0$, 则当 $|x|<1$ 时有

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}N(f_1,\cdots,f_m)N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)x^{f_1+\cdots+f_m}=(1-x)^{-mn}. \tag{1.4.1}$$

比较系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f\\ f_1\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}} N(f_1,\cdots,f_m)N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)=\frac{(mn+f-1)!}{(mn-1)!f!}. \tag{1.4.2}$$

证　在定理 1.2.3 中以 xx_i 代替 x_i, 并命 $x_i\to 1$, $y_i\to 1$, 即得定理 1.4.1.

定理 1.4.2　若 $|x|<1$, 则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(2f_1,\cdots,2f_n)x^{f_1+\cdots+f_n}=(1-x)^{-\frac{1}{2}n(n+1)}. \tag{1.4.3}$$

比较系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_n=f\\ f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}} N(2f_1,\cdots,2f_n)=\frac{\left(f+\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)!}.$$

证　由定理 1.3.2 极易推出本定理.

定理 1.4.3　若 $|x|<1$, 则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0} N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots)x^{f_1+f_2+\cdots+f_\nu}=(1-x)^{-\frac{1}{2}n(n-1)}. \tag{1.4.4}$$

比较系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_\nu=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0}} N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots)=\frac{\left(f+\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}. \tag{1.4.5}$$

§1.5　关于特征的恒等式

命 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$ 为 n 个整数. 以

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(X) \tag{1.5.1}$$

表示一般线性群标签为 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的表示法, 并假定当 X 是一酉方阵时, 它也是酉方阵. 习知 (1.5.1) 式是一 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 行列的方阵, 其对角线元素的和以

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(X)=\sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(X))$$

表之, 此称为表示 (1.5.1) 的特征.

若 X 是一对角线方阵 $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$, 则习知

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(\Lambda) = \frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}{D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}. \tag{1.5.2}$$

今后简书

$$A_{q,0,\cdots,0}(X) = A^{[q]}(X) = X^{[q]}$$

及

$$A_{\underbrace{1,\cdots,1}_{q\text{ 个}},0,\cdots,0}(X) = A^{(q)}(X) = X^{(q)}.$$

定理 1.5.1 命 $n \geqslant m > 0$. X 代表 m 维空间一般线性群 GL_m 中的一元素而 Y 代表 GL_n 中的一元素, 且以 $X \cdot \times Y$ 表 X 与 Y 的直乘积, 则

$$\sigma((X \cdot \times Y)^{[f]}) = \sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f \\ f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_m \geqslant 0}} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(X)\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Y). \tag{1.5.3}$$

证 先讨论 $X = [x_1, \cdots, x_m], Y = [y_1, \cdots, y_n]$ 时的情况. 由定理 1.2.3(并以 $x_i x$ 代 x_i) 可得

$$\sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_m \geqslant 0} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(X)\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Y)x^{f_1+\cdots+f_m} = \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - x x_i y_j)\right)^{-1}; \tag{1.5.4}$$

另一方面由定理 1.3.4 可知

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sigma((X \cdot \times Y)^{[f]})x^f \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - x x_i y_j)\right)^{-1}. \tag{1.5.5}$$

比较 (1.5.4) 与 (1.5.5) 的系数, 可知本定理对 X 及 Y 为对角线方阵时真实.

又 (1.5.3) 的任一项都是类函数, 即一函数 $f(X)$ 适合于次之性质者: 对任一非奇异方阵 P 常有 $f(X) = f(PXP^{-1})$. 因之对任一与 $[x_1, \cdots, x_m]$ 相似的 X 及任一与 $[y_1, \cdots, y_n]$ 相似的 Y, (1.5.3) 一定成立. 由连续性可知定理 1.5.1 成立.

定理 1.5.2 我们有恒等式

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_n=f \\ f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0}} \chi_{2f_1,\cdots,2f_n}(X) = \sigma((X^{[2]})^{[f]}). \tag{1.5.6}$$

证 先假定 $X = [x_1, \cdots, x_n]$. 由定理 1.3.2 可知

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} \chi_{2f_1,\cdots,2f_n}(x_1, \cdots, x_n)x^{f_1+\cdots+f_n} = \frac{1}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}(1 - x x_i x_j)};$$

另一方面, 在定理 1.3.4 中取 n 为 $N=\frac{1}{2}n(n+1), x_1,\cdots,x_n$ 为 $x_1^2, x_1x_2,\cdots,x_1x_n$, $x_2^2, x_2x_3,\cdots,x_2x_n, x_3^2,\cdots,x_n^2$, 则得出

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sigma((X^{[2]})^{[f]})x^f=\frac{1}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)}.$$

比较系数, 与上定理之证明法相同, 可得定理.

同法可得

定理 1.5.3　我们有恒等式

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_\nu=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0}}\chi_{f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots}(X)=\sigma((X^{[2]})^{[f]}). \tag{1.5.7}$$

第二章　计算若干积分

§2.1　与反正切函数相仿的一些积分

定理 2.1.1　若 $\alpha > \frac{1}{2}n$, 则

$$I_n(\alpha) = \int \cdots \int_T \frac{\dot{T}}{(\det(I+T^2))^\alpha}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+\nu)\right)}{\Gamma(2\alpha-\nu)}, \tag{2.1.1}$$

此处 T 过所有的 n 行列的实对称方阵 $T=(t_{jk})$, $\dot{T} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod\limits_{j\leqslant k} \mathrm{d}t_{jk}$.

首先让我们引进以下二定理:

定理 2.1.2　命 $Z = Z^{(m,n)}$, 则有

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z). \tag{2.1.2}$$

又凡适合于 $I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$ 的 Z 一定适合于 $I^{(n)} - \bar{Z}'Z > 0$, 反之亦然.

证　习知有二酉方阵 $U = U^{(m)}$, $V = V^{(n)}$ 存在, 使

$$Z = U\Lambda V,$$

此处

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu \geqslant 0.$$

由是即得

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)\cdots = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z).$$

定理的第二部分可由以下的事实来证明, 定理中的条件实质上等价于 $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 1, \cdots$.

定理 2.1.3 命 $a > 0, b^2 - ac < 0, \alpha > \dfrac{1}{2}$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} = a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.1.3}$$

证 命

$$y = \frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{a}\right),$$

则

$$dx = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dy$$

及

$$ax^2+2bx+c = \frac{ac-b^2}{a}(y^2+1).$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} &= a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^\alpha} \\ &= a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

定理 2.1.1 的证明. 命

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & v' \\ v & t \end{pmatrix} \quad (t = t_{nn}),$$

此处 T_1 为一 $n-1$ 行列的实对称方阵, v 为一 $n-1$ 维矢量, t 为一实数, 如是则

$$I + T^2 = \begin{pmatrix} I+T_1^2+v'v & T_1v'+v't \\ vT_1+tv & 1+vv'+t^2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b' \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c-bA^{-1}b' \end{pmatrix} \quad (A = A'), \tag{2.1.4}$$

可知

$$\det(I+T^2) = (1+vv'+t^2-(vT_1+tv)(I+T_1^2+v'v)^{-1}(T_1v'+v't))\det(I+T_1^2+v'v).$$

上式右边第一项因子可以写成 $at^2+2bt+c$ 的形式, 其中

$$a = 1 - v(I+T_1^2+v'v)^{-1}v',$$

$$\begin{aligned}2b &= -vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}v' - v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v' \\ &= -2v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v', \\ c &= 1+vv' - vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'.\end{aligned}$$

但对 T_1 有正交方阵 Γ 使

$$T_1 = \Gamma'[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}]\Gamma.$$

命

$$T_2 = \Gamma'\left[\sqrt{1+\lambda_1^2}, \cdots, \sqrt{1+\lambda_{n-1}^2}\right]\Gamma,$$

则

$$T_2 = T_2', \quad T_1T_2 = T_2T_1, \quad I+T_1^2 = T_2^2.$$

如命 $v = wT_2$, 则可知

$$\dot{v} = (\det T_2)\dot{w} = (\det(I+T_1^2))^{\frac{1}{2}}\dot{w}$$

及

$$I+T_1^2+v'v = T_2(I+w'w)T_2.$$

又如 u 为一 $n-1$ 维矢量, 则有

$$u(I+w'w)^{-1}u' = uu' - \frac{(uw')^2}{1+ww'}.$$

又

$$w(I+w'w)^{-1} = \frac{w}{1+ww'},$$

故可知

$$\begin{aligned}a &= 1 - w(I+w'w)^{-1}w' = (1+ww')^{-1}(>0), \\ b &= -w(I+w'w)^{-1}T_1w' = -\frac{wT_1w'}{1+ww'}, \\ c &= 1+wT_2^2w' - wT_1(I+w'w)^{-1}T_1w' = 1+ww' + \frac{(wT_1w')^2}{1+ww'}.\end{aligned}$$

于是得

$$ac - b^2 = 1.$$

由定理 2.1.3 得

$$I_n(\alpha) = \int \cdots \int_T \frac{\dot{T}}{(\det(I+T^2))^\alpha}$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{t,v,T_1} \cdots \int (\det(I + T_1^2 + v'v))^{-\alpha}(at^2 + 2bt + c)^{-\alpha} \mathrm{d}t\dot{v}\dot{T}_1$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_w \cdots \int (1 + ww')^{1-2\alpha} \dot{w} \int_{T_1} \cdots \int (\det(I + T_1^2))^{\frac{1}{2}-\alpha} \dot{T}_1$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+1)\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} \cdot I_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), \tag{2.1.5}$$

此处用了

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^{1-2\alpha} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+1)\right)}{\Gamma(2\alpha - 1)} \quad \left(\alpha > \frac{n+1}{4}\right). \tag{2.1.6}$$

继续运用 (2.1.5), 又因

$$I_1\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\alpha - \frac{n-1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)} \quad \left(\alpha > \frac{n}{2}\right),$$

即得定理.

定理 2.1.4 命 $n \geqslant 2$. 若 $\alpha > \frac{1}{4}(2n-3)$, 则

$$J_n(\alpha) = \int_K \cdots \int \frac{\dot{K}}{(\det(I + KK'))^{\alpha}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma(2\alpha - n + \nu)}, \tag{2.1.7}$$

此处 K 过所有的 n 行列的实斜对称方阵, $K = (k_{ij})$, $\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i<j} dk_{ij}$.

证 把 K 写成

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & -t' \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

此处 K_1 为一 $n-1$ 行列的实斜对称方阵, t 为一 $n-1$ 维矢量, 于是

$$I + KK' = \begin{pmatrix} I + K_1K_1' + t't & K_1t' \\ tK_1' & 1 + tt' \end{pmatrix}.$$

利用 (2.1.4) 可得

$$\det(I+KK')=(1+tt'-tK_1'(I+K_1K_1'+t't)^{-1}K_1t')\det(I+K_1K_1'+t't).$$

有一正交方阵 Γ 使

$$K_1=\Gamma\left(\begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}0 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & 0\end{pmatrix}\dot{+}\cdots\right)\Gamma',$$

括弧中最后一项视 n 为偶或奇而为 $\begin{pmatrix}0 & \lambda_{\frac{n}{2}}\\ -\lambda_{\frac{n}{2}} & 0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0 & \lambda_{\frac{n-1}{2}}\\ -\lambda_{\frac{n-1}{2}} & 0\end{pmatrix}\dot{+}0.$

命

$$T=\Gamma\left[\sqrt{1+\lambda_1^2},\ \sqrt{1+\lambda_1^2},\ \sqrt{1+\lambda_2^2},\ \sqrt{1+\lambda_2^2},\cdots\right]\Gamma',$$

则

$$T=T',\ K_1T=TK_1,\ I+K_1K_1'=T^2.$$

又命 $t=wT$, 则

$$\dot{t}=(\det T)\dot{w}=(\det(I+K_1K_1'))^{\frac{1}{2}}\dot{w},$$

$$I+K_1K_1'+t't=T^2+Tw'wT=T(I+w'w)T.$$

所以

$$\begin{aligned}&1+tt'-tK_1'(I+K_1K_1'+t't)^{-1}K_1t'\\=&1+wT^2w'-wTK_1'T^{-1}(I+w'w)^{-1}T^{-1}K_1Tw'\\=&1+wT^2w'-wK_1'(I+w'w)^{-1}K_1w'\\=&1+ww'-\frac{(wK_1w')^2}{1+ww'}=1+ww'.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I_n(\alpha)&=\int\cdots\int_K\frac{\dot{K}}{(\det(I+KK'))^{\alpha}}\\&=2^{\frac{n-1}{2}}\int\cdots\int_{K_1}\frac{\dot{K}_1}{(\det(I+K_1K_1'))^{\alpha-\frac{1}{2}}}\int\cdots\int_w(1+ww')^{-2\alpha}\dot{w}\\&=2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\Gamma\left(2\alpha-\frac{1}{2}(n-1)\right)}{\Gamma(2\alpha)}J_{n-1}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

连续应用此式并最后算出

$$J_2\left(\alpha-\frac{n-2}{2}\right)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{2\alpha-n+2}}=\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(2\alpha-n+\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha-n+2)}$$

$$\left(\alpha>\frac{1}{4}(2n-3)\right),$$

即得定理.

定理 2.1.5　设 $\alpha>n-\dfrac{1}{2}$, H 表 n 行列的爱尔米方阵, 则

$$H_n(\alpha)=\int\cdots\int_H\frac{\dot{H}}{(\det(I+H^2))^{\alpha}}$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\alpha-j-\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-j)}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{\Gamma(2\alpha-n-k)}{\Gamma(2\alpha-2k-1)},\qquad(2.1.8)$$

此处 $H=(h_{jk})$ 过所有的爱尔米方阵, 我们写成为 $h_{jj}=h_j$, $h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk}(j<k)$, $\dot{H}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{j=1}^{n}dh_j\prod\limits_{j<k}dh'_{jk}dh''_{jk}$.

证　命

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \bar{v}'\\ v & h\end{pmatrix}\quad(h=h_n),$$

其中 H_1 为一 $n-1$ 行列的爱尔米方阵, v 为一 $n-1$ 维矢量, h 为一实数, 则

$$I+H^2=\begin{pmatrix}I+H_1^2+\bar{v}'v & H_1\bar{v}'+\bar{v}'h\\ vH_1+hv & 1+h^2+v\bar{v}'\end{pmatrix}.$$

利用等式

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -pA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \bar{p}'\\ p & l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{I} & \overline{0}\\ -pA^{-1} & 1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & l-pA^{-1}\bar{p}'\end{pmatrix}\quad(A=\bar{A}'),\qquad(2.1.9)$$

可得

$$\det(I+H^2)=(ah^2+2bh+c)\det(I+H_1^2+\bar{v}'v),$$

此处

$$a=1-v(I+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}\bar{v}',$$

$$2b = -vH_1(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}\bar{v}' - v(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}',$$
$$c = 1 + v\bar{v}' - vH_1(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}'.$$

因 H_1 为爱尔米方阵, 故存在一酉方阵 U 使

$$H_1 = U[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\bar{U}'.$$

命

$$T = U\left[\sqrt{1+\lambda_1^2},\ \sqrt{1+\lambda_2^2}, \cdots, \sqrt{1+\lambda_n^2}\right]\bar{U}',$$

则

$$T = \bar{T}', \quad TH_1 = H_1T, \quad I + H_1^2 = T^2.$$

再作变换

$$v = uT,$$

则

$$\dot{v} = |\det T|^2\dot{u} = \det(I + H_1^2)\dot{u},$$
$$I + H_1^2 + \bar{v}'v = T(I + \bar{u}'u)T.$$

又因为

$$(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = \frac{\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'}, \quad w(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{w}' = w\bar{w}' - \frac{|w\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'},$$

此处 w 为一 $n-1$ 维矢量, 故可知

$$a = 1 - u(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = \frac{1}{1 + u\bar{u}'}(> 0),$$
$$b = -uH_1(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = -\frac{uH_1\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'},$$
$$c = 1 + uT^2\bar{u}' - uH_1(I + \bar{u}'u)^{-1}H_1\bar{u}' = 1 + u\bar{u}' + \frac{|uH_1\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'}.$$

由于 $uH_1\bar{u}'$ 是实数, 故得

$$ac - b^2 = 1.$$

由定理 2.1.3 可得

$$H_n(\alpha) = \int_H \cdots \int \frac{\dot{H}}{(\det(I + H^2))^\alpha}$$
$$= 2^{n-1}\int_{u,H_1}\cdots\int (\det(I + H_1^2))^{1-\alpha}(1 + u\bar{u}')^{-\alpha}\dot{u}\dot{H}_1\int_{-\infty}^{\infty}(ah^2 + 2bh + c)^{-\alpha}dh$$

$$= 2^{n-1}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{u}\cdots\int(1+u\bar{u}')^{1-2\alpha}\dot{u}\int\limits_{H_1}\cdots\int(\det(I+H_1^2))^{1-\alpha}\dot{H}_1$$

$$= 2^{n-1}\pi^{n-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha-1)}H_{n-1}(\alpha-1).$$

继续应用此式, 并直接算出

$$H_1(\alpha-n+1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{\alpha-n+1}}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-n+1)}\quad\left(\alpha>n-\frac{1}{2}\right),$$

即得定理.

§2.2　矩阵双曲空间的总体积

定理 2.2.1　命 $Z=Z^{(m,n)}, \lambda>-1$; 并命

$$J_{m,n}(\lambda)=\int\limits_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int\det(I-Z\bar{Z}')^{\lambda}\dot{Z},$$

则

$$J_{m,n}(\lambda)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\lambda+j)\prod\limits_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)}{\prod\limits_{l=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+l)}\pi^{mn}. \tag{2.2.1}$$

特别如 $\lambda=0$, 则矩阵双曲空间 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})=J_{m,n}(0)=\frac{(m-1)!\cdots 2!1!(n-1)!\cdots 2!1!}{(m+n-1)!\cdots 2!1!}\pi^{mn}. \tag{2.2.2}$$

在证明本定理之前, 先叙述两个递化公式来计算如次的积分:

$$\int\limits_{I^{(m)}-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\dot{Z}.$$

1) 把矩阵 Z 分裂成

$$Z=(Z_{m,n-1},q),$$

此处 $Z_{m,n-1}=Z^{(m,n-1)}$ 而 q 是一列, 显然有

$$I-Z\bar{Z}'=I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}-q\bar{q}'.$$

由 $I-Z\bar{Z}'>0$ 及 $q\bar{q}'\geqslant 0$ 可知 $I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0$, 故有一非奇异方阵 Γ 使

$$I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}=\Gamma\bar{\Gamma}'.$$

作变换 $q=\Gamma w$, 则

$$\dot{q}=|\det\Gamma|^2\dot{w}=(\det\Gamma\bar{\Gamma}')\dot{w}=\det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\dot{w},$$

故得

$$\int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} f(Z)\dot{Z}=\int\cdots\int_{I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0}\det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\dot{Z}_{m,n-1}\int\cdots\int_{I^{(m)}-w\bar{w}'>0} f(Z)\dot{w}.$$

在证明的过程中用了公式

$$I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}-q\bar{q}'=\Gamma(I-w\bar{w}')\bar{\Gamma}'.$$

由定理 2.1.2 可知, 从 $I^{(m)}-w\bar{w}'>0$ 可得 $1-\bar{w}'w>0$, 这就是一个普通的超球体, 故得出

$$\int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} f(Z)\dot{Z}=\int\cdots\int_{I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0}\det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\dot{Z}_{m,n-1}\int\cdots\int_{1-\bar{w}'w>0} f(Z)\dot{w}. \tag{2.2.3}$$

2) 我们用另一种方法来分裂

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{m-1,n}\\ p\end{pmatrix},\quad Z_{m-1,n}=Z^{(m-1,n)}$$

而 p 是矢量. 由于 $I-Z\bar{Z}'>0$ 与 $I-\bar{Z}'Z>0$ 等价, 故如 1) 可知

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} f(Z)\dot{Z}&=\int\cdots\int_{I-\bar{Z}'Z>0} f(Z)\dot{Z}\\ &=\int\cdots\int_{I-\bar{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n}>0}\det(I-\bar{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n})\dot{Z}_{m-1,n}\int\cdots\int_{I-\bar{u}'u>0} f(Z)\dot{u},\end{aligned}$$

此处 $p=u\Gamma$ 而 $I-\bar{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n}=\bar{\Gamma}'\Gamma$. 因此得出

$$\int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} f(Z)\dot{Z}=\int\cdots\int_{I-Z_{m-1,n}\bar{Z}'_{m-1,n}>0}\det(I-Z_{m-1,n}\bar{Z}'_{m-1,n})\dot{Z}_{m-1,n}\int\cdots\int_{1-u\bar{u}'>0} f(Z)\dot{u}. \tag{2.2.4}$$

定理 2.2.1 的证明. 反复应用 (2.2.3) 可得

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\dot{Z}=\int_{w_1\bar{w}_1'<1}\cdots\int(1-w_1\bar{w}_1')^{n-1}\dot{w}_1$$

$$\times\int_{w_2\bar{w}_2'<1}\cdots\int(1-w_2\bar{w}_2')^{n-2}\dot{w}_2\times\cdots\times\int_{w_n\bar{w}_n'<1}\cdots\int f(Z)\dot{w}_n. \tag{2.2.5}$$

取 $f(Z)=(\det(I-Z\bar{Z}'))^{\lambda}$, 可得

$$J_{m,n}(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\int_{w\bar{w}'<1}\cdots\int(1-w\bar{w}')^{j-1+\lambda}\dot{w}.$$

(此式亦可由 (2.2.4) 证明之.)

习知

$$\int_{x_1^2+\cdots+x_{2m}^2<1}\cdots\int(1-x_1^2-\cdots-x_{2m}^2)^{\mu-1}dx_1\cdots dx_{2m}=\pi^m\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)}\quad(\mu>0), \tag{2.2.6}$$

故得定理.

累次运用 (2.2.4) 式, 可得

定理 2.2.2　若 $Z=Z^{(m,n)}$, $m>l$; 又若 $f(Z)$ 乃一函数与 Z 之最底下 $m-l$ 行无关者. 如命 Z 之前 l 行所成之矩阵为 Z_1, 即可命 $f(Z)=f(Z_1)$, 如是则得

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\dot{Z}=\pi^{(m-l)n}\frac{0!1!\cdots(m-l-1)!}{n!(n+1)!\cdots(n+m-l-1)!}$$

$$\times\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\cdots\int f(Z_1)(\det(I-Z_1\bar{Z}_1'))^{m-l}\dot{Z}_1. \tag{2.2.7}$$

§2.3　对称方阵双曲空间的总体积

定理 2.3.1　命 $Z(=Z^{(n)}=Z')$ 表对称方阵; 并命

$$J_n(\lambda)=\int_{I-Z\bar{Z}>0}\cdots\int(\det(I-Z\bar{Z}))^{\lambda}\dot{Z},$$

则当 $\lambda>-1$ 时,

$$J_n(\lambda)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}$$

$$\times \frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)}. \tag{2.3.1}$$

特别如 $\lambda=0$, 则得对称方阵双曲空间 $\mathfrak{R}_{\rm II}$ 的总体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\rm II})=J_n(0)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\cdot\frac{2!4!\cdots(2n-2)!}{(n+1)!(n+2)!\cdots(2n-1)!}. \tag{2.3.2}$$

在证明此定理之前, 我们引进以下的定理:

定理 2.3.2　若 a, c 是实数, b 是复数, $a<0$, $|b|^2-ac>0$, $\lambda>-1$, 则

$$\iint\limits_{c+b\bar z+\bar b z+az\bar z>0}(c+b\bar z+\bar b z+az\bar z)^{\lambda}\dot z=\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\frac{\pi}{\lambda+1}. \tag{2.3.3}$$

证　命

$$w=\left(z+\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{a^2}{|b|^2-ac}},$$

则

$$\dot w=\frac{a^2}{|b|^2-ac}\dot z$$

及

$$\begin{aligned}&c+b\bar z+\bar b z+az\bar z\\=&c-\frac{|b|^2}{a}+a\left(z+\frac{b}{a}\right)\overline{\left(z+\frac{b}{a}\right)}=\left(c-\frac{|b|^2}{a}\right)(1-w\bar w).\end{aligned}$$

所以 (2.3.3) 的左边等于

$$\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\iint\limits_{1-w\bar w>0}(1-w\bar w)^{\lambda}\dot w=\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\frac{\pi}{\lambda+1}.$$

定理 2.3.1 的证明. 命

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 & v' \\ v & z\end{pmatrix},$$

此处 Z_1 是一 $n-1$ 行列的对称方阵, v 是一 $n-1$ 维的矢量, z 是一复数, 于是

$$I-Z\bar Z=\begin{pmatrix} I-Z_1\bar Z_1-v'\bar v & -(Z_1\bar v'+v'\bar z) \\ -(v\bar Z_1+z\bar v) & 1-v\bar v'-z\bar z\end{pmatrix}.$$

利用 (2.1.9), 可知 $I-Z\bar Z>0$ 与下列二式:

$$I-Z_1\bar Z_1-v'\bar v>0$$

及

$$1 - v\bar{v}' - z\bar{z} - (v\bar{Z}_1 + z\bar{v})(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}(\overline{v\bar{Z}_1 + z\bar{v}})' > 0$$

等价, 且有

$$\begin{aligned}&\det(I - Z\bar{Z})\\=&(1 - v\bar{v}' - z\bar{z} - (v\bar{Z}_1 + z\bar{v})(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}(\overline{v\bar{Z}_1 + z\bar{v}})')\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}),\end{aligned}$$

故所求的积分

$$J_n(\lambda) = \int\limits_{I - Z_1\bar{Z}_1 - v'v > 0}\cdots\int \det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{\lambda}\dot{Z}_1\dot{v} \iint\limits_{c + b\bar{z} + \bar{b}z + az\bar{z} > 0} (c + b\bar{z} + \bar{b}z + az\bar{z})^{\lambda}\dot{z},$$

此处

$$\begin{aligned}a &= -1 - \bar{v}(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}v'(< 0),\\b &= -v\bar{Z}_1(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}v',\\c &= 1 - v\bar{v}' - v\bar{Z}_1(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}Z_1\bar{v}'.\end{aligned}$$

由于 $I - Z_1\bar{Z}_1$ 是定正的, 所以有一非奇异方阵 Γ 存在, 使

$$I - Z_1\bar{Z}_1 = \Gamma\bar{\Gamma}'.$$

又命

$$v' = \Gamma u', \quad v = u\Gamma',$$

可知

$$\dot{v} = |\det \Gamma|^2\dot{u} = \det(I - Z_1\bar{Z}_1)\dot{u},$$

$$(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1} = \bar{\Gamma}'^{-1}(I - u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}.$$

又因为

$$(I - u'\bar{u})^{-1}u' = \frac{u'}{1 - \bar{u}u'}, \quad w(I - u'\bar{u})^{-1}\bar{w}' = w\bar{w}' + \frac{|wu'|^2}{1 - \bar{u}u'},$$

此处 w 为一 $n-1$ 维矢量, 可知

$$\begin{aligned}a &= -(1 + \bar{u}(I - u'\bar{u})^{-1}u') = -\frac{1}{1 - \bar{u}u'},\\b &= -u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I - u'\bar{u})^{-1}u' = -\frac{u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'}{1 - \bar{u}u'},\\c &= 1 - u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}' - u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I - u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}'\end{aligned}$$

$$= 1 - u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}' - u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}' - \frac{|u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'|^2}{1-\bar{u}u'}.$$

于是得出

$$\begin{aligned}|b|^2 - ac &= \frac{1}{1-\bar{u}u'}(1 - u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}' - u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}') \\ &= \frac{1}{1-\bar{u}u'}(1 - u\Gamma'(I + \bar{Z}_1(I - Z_1\bar{Z}_1)^{-1}Z_1)\bar{\Gamma}\bar{u}') \\ &= \frac{1}{1-\bar{u}u'}(1 - u\Gamma'(I - \bar{Z}_1 Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{u}') = 1.\end{aligned}$$

故由定理 2.3.2 及

$$\begin{aligned}\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}) &= \det(I - u'\bar{u})\det(I - Z_1\bar{Z}_1) \\ &= (1 - \bar{u}u')\det(I - Z_1\bar{Z}_1),\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}J_n(\lambda) &= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}>0}\frac{(\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}))^{\lambda}}{(1+\bar{v}(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}v')^{\lambda+2}}\dot{Z}_1\dot{v} \\ &= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I - Z_1\bar{Z}_1>0}(\det(I - Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1\int\cdots\int_{I - u'\bar{u}>0}(1 - \bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u} \\ &= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I - Z_1\bar{Z}_1>0}(\det(I - Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1\int\cdots\int_{1 - \bar{u}u'>0}(1 - \bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u}\end{aligned}$$

(由定理 2.2.2). 由 (2.2.6) 可知

$$J_n(\lambda) = J_{n-1}(\lambda+1)\frac{\pi^n}{\lambda+1}\frac{\Gamma(2\lambda+3)}{\Gamma(2\lambda+n+2)}. \tag{2.3.4}$$

续行此法, 并直接算出 $n=1$ 的情况, 可得

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)}.$$

§2.4 斜对称方阵双曲空间的总体积

定理 2.4.1 命 $n \geqslant 2$, $Z(= Z^{(n)} = -Z')$ 表斜对称方阵; 并命

$$K_n(\lambda) = \int\cdots\int_{I+Z\bar{Z}>0}\det(I + Z\bar{Z})^{\lambda}\dot{Z},$$

则当 $\lambda > -\dfrac{1}{2}$ 时,

$$K_n(\lambda) = \pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-2)}. \tag{2.4.1}$$

特别如 $\lambda = 0$, 则斜对称方阵双曲空间 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\rm III}) = \pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{2!4!\cdots(2n-4)!}{(n-1)!n!\cdots(2n-3)!}. \tag{2.4.2}$$

证　命

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -u' \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

此处 Z_1 是 $n-1$ 行列的斜对称方阵, u 是一 $n-1$ 维矢量, 则

$$I + Z\bar{Z} = \begin{pmatrix} I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u} & -Z_1\bar{u}' \\ u\bar{Z}_1 & 1 - u\bar{u}' \end{pmatrix}.$$

由 (2.1.9) 可知 $I + Z\bar{Z} > 0$ 与下列二式:

$$I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u} > 0 \tag{2.4.3}$$

及

$$1 - u\bar{u}' + u\bar{Z}_1(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}' > 0 \tag{2.4.4}$$

等价, 并可知

$$\det(I + Z\bar{Z}) = (1 - u\bar{u}' + u\bar{Z}_1(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}')\det(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u}).$$

命 $I + Z_1\bar{Z}_1 = \Gamma\bar{\Gamma}'$, $u = v\Gamma'$, 由 (2.4.3) 可知

$$I + Z_1\bar{Z}_1 > 0 \text{ 及 } I - v'\bar{v} > 0.$$

(2.4.4) 的左边等于

$$\begin{aligned}
&1 - v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}' + v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I - v'\bar{v})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\Gamma\bar{v}' \\
=&1 - v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}' + v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\
=&1 - v\Gamma'(I + \bar{Z}_1Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\
=&1 - v\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\
=&1 - v\bar{v}',
\end{aligned}$$

此处用了 $\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}$ 是斜对称的性质, 因此得出 (由定理 2.2.2)

$$K_n(\lambda)=\int\cdots\int_{I+Z_1\bar{Z}_1>0}(\det(I+Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1\iint_{I-v'\bar{v}>0}(1-v\bar{v}')^{2\lambda}\dot{v}$$
$$=\pi^{n-1}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+n)}K_{n-1}(\lambda+1).$$

续行此法并最后算出

$$K_2(\lambda+n-2)=\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{2\lambda+2n-4}\dot{z}=\pi\frac{\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+2n-2)},$$

即得定理.

§2.5　超球双曲空间的总体积

今往研究超球双曲空间 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$: 命 z 代表 n 维矢量 $(z_1,\cdots,z_n)$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 乃适合于

$$|zz'|^2+1-2\bar{z}z'>0 \tag{2.5.1}$$

及

$$|zz'|<1 \tag{2.5.2}$$

的 z 所成的集合. 先把此域的定义换一种说法. 由 (2.5.1) 及 (2.5.2) 可知

$$(1-\bar{z}z')^2>(\bar{z}z')^2-|zz'|^2>(\bar{z}z')^2-1. \tag{2.5.3}$$

由 (2.5.3) 易见

$$\bar{z}z'<1. \tag{2.5.4}$$

从 (2.5.3) 的左一半及 $\bar{z}z'\geqslant|zz'|$, 可知

$$1-\bar{z}z'>\sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2}, \tag{2.5.5}$$

所以凡适合于 (2.5.1) 及 (2.5.2) 的点一定适合 (2.5.5).

反之, 凡适合 (2.5.5) 的点, 显然适合 (2.5.1). 又由 $|zz'|\leqslant\bar{z}z'$ 及 (2.5.5) 可得 $|zz'|<1$, 即 (2.5.2), 故 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 可由 (2.5.5) 来定义.

定理 2.5.1　若 $\alpha>-1$, $\beta>-(n+\alpha)$, 则

$$L_n(\alpha,\beta)=\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}(1-\bar{z}z'-\sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2})^{\alpha}(1-\bar{z}z'$$

$$+\sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2})^{\beta}\dot{z}=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\frac{1}{\alpha+\beta+n}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}. \tag{2.5.6}$$

又当 $\alpha=\beta=0$, 则 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{n!}. \tag{2.5.7}$$

证　当 $n=1$ 时, 命 $z=x+iy, x, y$ 是实数, 此时

$$\bar{z}z'=|zz'|=x^2+y^2,$$

故 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 即为复平面上的单位圆; 因而得出

$$L_1(\alpha,\beta)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}(1-x^2-y^2)^{\alpha+\beta}dxdy=\frac{\pi}{\alpha+\beta+1}.$$

定理已明.

当 $n\geqslant 2$ 时, 命 $z=x+iy$, 此处 x,y 是实矢量, (2.5.5) 变为

$$1-xx'-yy'>2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2}, \tag{2.5.8}$$

因此

$$L_n(\alpha,\beta)=\int\cdots\int\limits_{x,y}(1-xx'-yy'-2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2})^{\alpha}$$
$$\times(1-xx'-yy'+2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2})^{\beta}\dot{x}\dot{y}.$$

此积分展布于 (2.5.8) 上. 对一固定的 x, 有一行列式为 1 的正交方阵 R 使

$$xR=(\sqrt{xx'},0,\cdots,0).$$

对 y 行变换 $yR=(\xi,w)$, 此处 ξ 是一实数, w 是一 $n-1$ 维实的矢量, 如此则 (2.5.8) 变为

$$1-xx'-\xi^2-ww'>2\sqrt{xx'(\xi^2+ww')-xx'\xi^2}=2\sqrt{xx'ww'}. \tag{2.5.9}$$

因之所求积分等于

$$L_n(\alpha,\beta)=\int\cdots\int\limits_{\xi,w,x}(1-\xi^2-xx'-ww'-2\sqrt{xx'ww'})^{\alpha}$$
$$\times(1-\xi^2-xx'-ww'+2\sqrt{xx'ww'})^{\beta}d\xi\dot{w}\dot{x},$$

此积分展布于 (2.5.9).

命 $x=\sqrt{1-\xi^2}u, w=\sqrt{1-\xi^2}v$, 可得

$$\begin{aligned}L_n(\alpha,\beta)=&\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}(2n-1)}d\xi\int_{1-uu'-vv'>2\sqrt{uu'vv'}}\cdots\int(1-uu'-vv'\\&-2\sqrt{uu'vv'})^\alpha(1-uu'-vv'+2\sqrt{uu'vv'})^\beta\dot{u}\dot{v}\\=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\cdot 2^{2n-1}P,\end{aligned}\tag{2.5.10}$$

此处

$$P=\int_{\substack{1-uu'-vv'>2\sqrt{uu'vv'}\\u_\mu\geqslant 0,v_\nu\geqslant 0}}\cdots\int(1-uu'-vv'-2\sqrt{uu'vv'})^\alpha(1-uu'-vv'+2\sqrt{uu'vv'})^\beta\dot{u}\dot{v}.$$

命 $\eta^2=uu'$, $\zeta^2=vv'$, 则

$$\begin{aligned}P=&\iint_{\substack{\eta+\zeta<1\\\eta\geqslant 0,\zeta\geqslant 0}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta d\eta d\zeta\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2\leqslant\eta^2\\u_\mu\geqslant 0}}\cdots\int\frac{\eta du_2\cdots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\cdots-u_n^2}}\\&\times\int_{\substack{v_3^2+\cdots+v_n^2\leqslant\zeta^2\\v_\nu\geqslant 0}}\cdots\int\frac{\zeta dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{\zeta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}.\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2\leqslant\eta^2\\u_\mu\geqslant 0}}\cdots\int\frac{\eta du_2\cdots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\cdots-u_n^2}}&=\eta^{n-1}\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2\leqslant 1\\u_\mu\geqslant 0}}\cdots\int\frac{du_2\cdots du_n}{\sqrt{1-u_2^2-\cdots-u_n^2}}\\&=\eta^{n-1}\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

将此结果代入 (2.5.11) 可得

$$\begin{aligned}P=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint_{\substack{\eta+\zeta<1\\\eta\geqslant 0,\zeta\geqslant 0}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\eta^{n-1}\zeta^{n-2}d\eta d\zeta\\=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint_{\substack{\eta+\zeta<1\\0\leqslant\eta\leqslant\zeta}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\\&\times\eta^{n-2}\zeta^{n-2}(\eta+\zeta)d\eta d\zeta\end{aligned}$$

(取$\zeta-\eta=\tau, \zeta+\eta=\sigma$)

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma<1}(1-\sigma^2)^{\alpha}(1-\tau^2)^{\beta}\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right)^{n-2}$$

$$\times\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^{n-2}\sigma\frac{d\sigma d\tau}{2}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-6}}$$

$$\times\int_0^1(1-\tau^2)^{\beta}d\tau\int_{\tau}^1(1-\sigma^2)^{\alpha}(\sigma^2-\tau^2)^{n-2}\sigma d\sigma$$

$\left(命\omega=\frac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2},\ 1-\omega=\frac{1-\sigma^2}{1-\tau^2}\right)$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-5}}\int_0^1(1-\tau^2)^{\alpha+\beta+n-1}d\tau\int_0^1(1-\omega)^{\alpha}\omega^{n-2}d\omega$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-4}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(\alpha+n)}.$$

代入 (2.5.10) 得到

$$L_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{2^{2n-3}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n+1)}\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

$$=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\frac{1}{\alpha+\beta+n}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

$\left(此处用了习知的公式：\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\cdot 2^{1-2x}\right).$

第三章　方阵的极坐标

§3.1　酉积分元素

将 n 行列的方阵 Z 看成为 $2n^2$ 维 (实) 空间的一点, 则当 Z 过所有的酉方阵时, 在 $2n^2$ 维空间中得出一维数是 n^2 的流形. n 行列的酉群及它所代表的流形都以 $\mathfrak{U}_n$ 表示, 今往算出流形 $\mathfrak{U}_n$ 上的积分元素.

如把 Z 所经过的 $2n^2$ 维空间看作普通的欧几里得空间, 这空间的基本微分二次型定义为

$$\sigma(dZd\overline{Z}') = \sum_{i,j=1}^{n} |dz_{ij}|^2.$$

以 $Z = U$(酉方阵) 代入, 由于

$$d\overline{U}' = -U^{-1}dUU^{-1},$$

所以在流形 $\mathfrak{U}_n$ 上的基本二次型等于

$$ds^2 = -\sigma(dUU^{-1}dUU^{-1}). \tag{3.1.1}$$

命

$$\delta U = U^{-1}dU = \overline{U}'dU, \tag{3.1.2}$$

由于 $0 = d(I) = d(\overline{U}'U) = \overline{U}'dU + d\overline{U}'U$, 因此

$$\overline{\delta U}' = -\delta U; \tag{3.1.3}$$

故 (3.1.1) 可以写成为

$$ds^2 = \sigma(\delta U\overline{\delta U}'). \tag{3.1.4}$$

把 δU 写成为 (δu_{jk}), 由 (3.1.3) 可知 $\delta u_{jk} = -\overline{\delta u}_{kj}$. 代进 (3.1.4) 可得

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |\delta u_{jk}|^2. \tag{3.1.5}$$

写成实向量 $\delta u_{jj} = i\delta s_j, \delta u_{jk} = \delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}, \delta u_{kj} = -\delta s_{jk} + i\delta s'_{jk} (j < k)$, 故

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \delta s_j^2 + 2\sum_{j<k}((\delta s_{jk})^2 + (\delta s'_{jk})^2). \tag{3.1.6}$$

因此 $\mathfrak{U}_n$ 上的积分元素

$$\dot{U}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}\delta s_j\prod_{j<k}(\delta s_{jk}\delta s'_{jk}). \tag{3.1.7}$$

命 V 及 W 表任二固定的酉方阵, 则从变形

$$U_1=VUW \tag{3.1.8}$$

可得

$$\delta U_1=\overline{W}'\delta UW,$$

故

$$\sigma(\delta U_1\overline{\delta U}'_1)=\sigma(\overline{W}'\delta U\overline{\delta U}'W)=\sigma(\delta U\overline{\delta U}'). \tag{3.1.9}$$

因此得出

$$\dot{U}_1=\dot{U}. \tag{3.1.10}$$

这是酉积分元素经变形 (3.1.8) 的不变性.

今往引进酉方阵的襄变量表示法. 在此种表示法之下, 酉积分更清楚. 命

$$U=(I+iH)(I-iH)^{-1}, \tag{3.1.11}$$

不难证明, H 是一爱尔米方阵; 这 H 称为襄变量. (3.1.11) 的逆变换是

$$H=i(I-U)(I+U)^{-1}. \tag{3.1.12}$$

不难证明, 一般说来从酉群 $\mathfrak{U}_n$ 到 n 行列的爱尔米方阵的集合是一对一的. 所谓 "一般说来" 乃指可能有较低维的流形是例外, 如 $\det(I+U)=0$ 流形[①]就是例外.

微分 (3.1.11) 可得

$$\begin{aligned}dU&=idH(I-iH)^{-1}+i(I+iH)(I-iH)^{-1}dH(I-iH)^{-1}\\&=2i(I-iH)^{-1}dH(I-iH)^{-1},\end{aligned}$$

故得

$$\delta U=2i(I+iH)^{-1}dH(I-iH)^{-1}. \tag{3.1.13}$$

因此得出

$$\sigma(\delta U\overline{\delta U}')=4\sigma((I+H^2)^{-1}dH(I+H^2)^{-1}dH),$$

所以

$$\dot{U}=2^{n^2}\det(I+H^2)^{-n}\dot{H}, \tag{3.1.14}$$

① $\det(I+iH)=0$ 是永不可能的.

此处 $\dot{H}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j<k}(dh'_{jk}dh''_{jk})$, 而 $H=(h_{jk}), h_{jj}=h_j, h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk}$. 在这种表示法下, 酉方阵的流形一变而为

$$-\infty<h_j<\infty,\quad -\infty<h'_{jk},\quad h''_{jk}<\infty. \tag{3.1.15}$$

当然必须除去一个较低维的例外流形.

定理 3.1.1　酉流形 $\mathfrak{U}_n$ 的体积等于

$$\omega_n=\frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

证　由 (3.1.4) 可知

$$\omega_n=\int\cdots\int_U\dot{U}=2^{n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int(\det(I+H^2))^{-n}\dot{H};$$

再由定理 2.1.5 可知

$$\omega_n=2^{n^2}2^{\frac{n(n-1)}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(n-k)}{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1)}.$$

由于 $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2x)2^{1-2x}$, 可知

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\Gamma(n-j)\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right)\right)&=\pi^{\frac{n}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}(\Gamma(2n-2j-1)2^{2-2n+2j})\\&=\pi^{\frac{n}{2}}2^{-n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1).\end{aligned}$$

故得定理.

附记 1　有些书上用 $\prod_{j=1}^{n}\delta s_j\prod_{j<k}(\delta s_{jk}\delta s'_{jk})$ 作为酉群的积分元素, 它和 (3.1.7) 差一个常数因子 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

附记 2　在裹变量表示法 (3.1.11) 中, 例外的部分可以设法免除. 免除的方法是引进爱尔米方阵的齐次坐标, 即利用爱尔米方阵的射影几何学的方法, 本书中不加叙述.

§3.2 酉群的傍系的积分

任一酉方阵 U 可以表成为

$$U = V\Lambda V^{-1}, \quad \Lambda = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}], \quad 2\pi > \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0, \tag{3.2.1}$$

此处 V 是酉方阵. 因 $e^{i\theta_j}(1 \leqslant j \leqslant n)$ 是 U 的特征根, 故 Λ 是唯一的. 又若

$$U = V\Lambda V^{-1} = V_1\Lambda V_1^{-1},$$

如果 U 的特征根各不相同, 则得出 $V_1^{-1}V = W = [e^{i\varphi_1}, \cdots, e^{i\varphi_n}]$. 所有形如 $W = [e^{i\varphi_1}, \cdots, e^{i\varphi_n}]$ 的酉方阵组成 $\mathfrak{U}_n$ 的一个子群. 命 $[\mathfrak{U}_n]$ 表 $\mathfrak{U}_n$ 对此子群的傍系的集合, 则 V_1 与 V 属于同一个傍系. 于是, 一般言之, 任一 U 方阵必一一对应于一个 Λ 及 $[\mathfrak{U}_n]$ 中的一个傍系. 今往求出酉积分元素和 Λ 的积分元素以及 $[\mathfrak{U}_n]$ 的积分元素间的关系.

微分 (3.2.1),

$$dU = dV\Lambda V^{-1} - V\Lambda V^{-1}dVV^{-1} + Vd\Lambda V^{-1},$$

即得

$$\overline{V}'dUV = \delta V\Lambda - \Lambda\delta V + d\Lambda,$$

故

$$\begin{aligned}\sigma(dU\overline{dU}') =& \sigma((\delta V\Lambda - \Lambda\delta V)(\overline{\delta V\Lambda - \Lambda\delta V})') + \sigma((\delta V\Lambda - \Lambda\delta V)\overline{d\Lambda}') \\ &+ \sigma(d\Lambda(\overline{\delta V\Lambda - \Lambda\delta V})') + \sigma(d\Lambda\overline{d\Lambda}').\end{aligned}$$

由于 $\sigma((\delta V\Lambda - \Lambda\delta V)\overline{d\Lambda}') = 0$, 并命 $\delta V = (\delta v_{jk})$, 即知

$$\sigma(dU\overline{dU}') = \sum_{j,k=1}^{n} |\delta v_{jk}(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k})|^2 + \sum_{j=1}^{n} d\theta_j^2,$$

注意此处 δv_{jj} 并不出现. 由微分矢量所张成的积分元素以 $\dot{V}$ 表之, 而以 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\dot{V} = [\dot{U}]$ 表 $[U]$ 上的积分元素. 于是得出

$$\dot{U} = [\dot{U}]\prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{3.2.2}$$

定理 3.2.1 傍系集合 $[\mathfrak{U}_n]$ 的体积等于

$$\omega_n' = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

证

$$\omega_n = \omega_n' \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_n$$
$$= \frac{\omega_n'}{n!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

把

$$\prod_{j<k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k})$$

表成为

$$\sum_j \delta_{j_1 \cdots j_n} e^{i((n-1)\theta_{j_1} + (n-2)\theta_{j_2} + \cdots + \theta_{j_{n-1}})}$$

(共有 $n!$ 项), 由于 $e^{i(m_1\theta_1+\cdots+m_n\theta_n)}$ 的正交性, 因之得出

$$\omega_n = (2\pi)^n \omega_n'.$$

定理得证.

现在我们再来讨论另一傍系集合 $\{\mathfrak{U}_n\}$, 其子群是由形如 $[\pm1, \cdots, \pm1]$ 的 2^n 个方阵组成的. 任一酉方阵 U 可以 $[\mathfrak{U}_n]$ 中的一个傍系 $[U]$ 及一个对角线方阵 $\Lambda = [e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}] (0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi)$ 表之. 又 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的一元可以看成为一个如次定义的集合: 由诸傍系 $[U]$ 及所有 $\Lambda = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}] (0 \leqslant \theta_1, \cdots, \theta_n \leqslant \pi)$ 所成的集合, 故 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的总体积等于 $2^{-n}\omega_n$.

§3.3 爱尔米方阵的极坐标

习知任一爱尔米方阵 H 可以表成为

$$H = U\Lambda\overline{U}', \tag{3.3.1}$$

此处 U 是酉方阵, $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是一对角线方阵

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

(U, Λ) 可以称为爱尔米方阵的极坐标, 其中 Λ 对应于普通极坐标中的向径, 而 U 对应于辐角. 但现在的缺点是其间的对应不是一对一的. 若

$$H = U\Lambda\overline{U}' = U_1\Lambda_1\overline{U}_1',$$

则显然有 $\Lambda = \Lambda_1$; 如果 H 的特征根各不相同, 则得出 $U_1^{-1}U = V = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]$, 即 $U = U_1V$. 因此一般说来, H 到 $([\mathfrak{U}_n], \Lambda)$ 的对应是一对一的, 盖 H 有重根时, 即成一较低维的流形时是例外.

微分 (3.3.1) 可得

$$dH = dU\Lambda\overline{U}' + Ud\Lambda\overline{U}' + U\Lambda d\overline{U}',$$

故

$$\overline{U}'dHU = \delta U\Lambda + d\Lambda - \Lambda\delta U.$$

命 $\overline{U}'dHU = \delta G$ 及 $\delta G = (\delta g_{jk})$, 则

$$\delta g_{jk} = \delta u_{jk}(\lambda_k - \lambda_j) \quad (j \neq k),$$
$$\delta g_{jj} = d\lambda_j.$$

分开 δg_{jk} 的虚实部分, 可得

$$\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n[\dot{U}], \tag{3.3.2}$$

因而得出

$$\det(I + H^2)^{-n}\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i^2)^{-n} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n[\dot{U}]. \tag{3.3.3}$$

命

$$e^{i\theta_j} = (1 + i\lambda_j)(1 - i\lambda_j)^{-1},$$

则因 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, 故可命 $\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$; 又

$$\prod_{j<k}(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) = \prod_{j<k}(2i(\lambda_j - \lambda_k)) \prod_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)^{-(n-1)},$$

于是

$$\prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 = 2^{n(n-1)} \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{k=1}^{n}(1 + \lambda_k^2)^{-(n-1)};$$

又因

$$d\theta_j = \frac{2d\lambda_j}{(1 + \lambda_j^2)}$$

及 (3.1.14), 所以得出

$$\dot{U} = \prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n[\dot{U}], \tag{3.3.4}$$

此处 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 是 U 的特征根, 且 $\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$.

§3.4 方阵的极坐标

今往讨论任意 n 行列的方阵的极坐标. 已知任一方阵 Z 可以表成为

$$Z = U\Lambda V, \tag{3.4.1}$$

此处 U 及 V 是 n 行列的酉方阵, $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是一对角线方阵, 其对角线上的元素适合于

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

此 (U, Λ, V) 可以称为 Z 的极坐标, 但需注意 Z 与 (U, Λ, V) 之间的关系并非一一对应的. 但是, 今将证明, Z 所成的集合除去较低维空间的流形外与 $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ 一一对应. 假定

$$Z = U\Lambda V = U_1 \Lambda_1 V_1,$$

由于 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 $Z\overline{Z}'$ 的特征根, 因此 $\Lambda = \Lambda_1$. 又命 $U_1^{-1}U = U_2$, 则

$$U_2 \Lambda^2 \overline{U}_2' = \Lambda^2.$$

今假定诸 λ_μ 互不相等, 则得 U_2 是一对角线酉方阵, 因得到以上所陈述的结果. 仅需注意 ZZ' 有重特征根的情况, 此时 Z 成一较低维的流形.

注意: $\mathfrak{U}_n$ 的维数 (实) 是 n^2, $[\mathfrak{U}_n]$ 的维数是 n^2-n, Λ 的维数是 n, 故 $[\mathfrak{U}_n]\times\Lambda\times\mathfrak{U}_n$ 的维数确实与 Z 的维数 $2n^2$ 相等.

今往研究变形 (3.4.1) 的函数行列式. 为了易于了解及将来引用方便计, 今分步地完成坐标变换的手续.

1) 习知任一定正爱尔米方阵 H 可以唯一地表成为 $T\overline{T}'$, 此处 T 乃一三角方阵, 其右上半皆为零, 其对角线上皆为正实数.

把 H 写成为 (h_{jk}) 并命 $h_{jj} = h_j$ 及 $h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk} (j > k)$, 此处 h_j, h'_{jk}, h''_{jk} 都是实数, 共有 n^2 个; 又命

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j>k} (dh'_{jk} dh''_{jk})$$

表爱尔米方阵的体积元素.

把 T 写成为 $T = (t_{jk}), t_{jj} = t_j, t_{jk} = t'_{jk} + it''_{jk} (j > k)$, 此处 t_j, t'_{jk}, t''_{jk} 都是实数, 且命

$$\dot{T} = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}t_j \prod_{j>k} (\mathrm{d}t'_{jk} \mathrm{d}t''_{jk})$$

表三角方阵所成的流形的体积元素.

定理 3.4.1　我们有次之等式

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3t_n\dot{T}.$$

证　今用归纳法来证明这一定理. 当 $n=1$ 时, 因 $h_1=t_1^2$, 此定理显然真实. 命

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & \bar{v}' \\ v & h_n \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ \tau & t_n \end{pmatrix},$$

由 $H=T\overline{T}'$ 可得

$$H_1=T_1\overline{T}_1',\quad v=\tau\overline{T}_1',\quad h_n=\tau\bar{\tau}'+t_n^2.$$

容易算出, v 与 τ 间的函数行列式 $\dfrac{\partial(v)}{\partial(\tau)}=|\det T_1|^2$, $\dfrac{\partial h_n}{\partial t_n}=2t_n$, 故得

$$\prod_{k=1}^{n-1}dh_{nk}'dh_{nk}''=|\det T_1|^2\prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{d}t_{nk}'\mathrm{d}t_{nk}'')=(t_1\cdots t_{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{d}t_{nk}'\mathrm{d}t_{nk}'').$$

由归纳法假定可知

$$\begin{aligned}\dot{H}&=2^{n-1}\dot{H}_1\prod_{k=1}^{n-1}(dh_{nk}'dh_{nk}'')dh_n=2^n(t_1\cdots t_{n-1})^2t_n\dot{H}_1\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{d}t_{nk}'\mathrm{d}t_{nk}'')\mathrm{d}t_n\\&=2^n(t_1\cdots t_{n-1})^2t_n\left(2^{\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-2)+1}\cdots t_{n-1}\right)\dot{T}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3t_n\dot{T}.\end{aligned}$$

2) 对任一行列式不为零的方阵 Z, 由 1) 可知有一如 1) 所述的三角方阵 T, 使 $Z\overline{Z}'=T\overline{T}'$. 于是得出

定理 3.4.2　任一非奇异的方阵 Z 可以唯一地表成为 TU 之形, 此处 U 乃一酉方阵而 T 乃一三角方阵, 其右上角为零而其对角线上元素为正.

证　由 $Z\overline{Z}'=T\overline{T}'$, 故可令 $Z^{-1}T=U^{-1}$, 即得 $Z=TU$.

又因一个右上方为零且对角线上元素为正数的三角方阵为酉方阵的必要且充分条件为此方阵 I, 故若

$$Z=TU=T_1U_1,$$

则必 $T=T_1$, 从而 $U=U_1$.

定理 3.4.3　由定理 3.4.2 中 Z 之表示法所得出之体积元素间的关系如次:

$$\dot{Z}=2^{-\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3t_n\dot{T}\dot{U},\tag{3.4.2}$$

此处 $\dot{U}$ 乃酉方阵的体积元素.

证 由

$$Z = TU$$

可得出

$$dZ = dTU + TdU, \tag{3.4.3}$$

行列互换并取其共轭虚数立得

$$d\overline{Z}' = U^{-1}d\overline{T}' + dU^{-1}\overline{T}' = U^{-1}d\overline{T}' - U^{-1}dUU^{-1}\overline{T}'.$$

命 $\delta U = dUU^{-1}, dP = dZU^{-1}$ 及 $dQ = Ud\overline{Z}'$, 可得

$$\begin{cases} dP = dT + T\delta U, \\ dQ = d\overline{T}' - \delta U\overline{T}' \end{cases} \tag{3.4.4}$$

(此处之 δU 与 §3.1 中所定义者不同, 但 §3.1 中 δU 所具有之性质, 现在的 $\delta U = dUU^{-1}$ 亦均具备). 命 $\delta U = (dv_{jk})$.

将 (3.4.4) 依元素写出, 即

$$dp_{jk} = \mathrm{d}t_{jk} + \sum_{s=1}^{j} t_{js}dv_{sk}, \quad 若\ j > k; \tag{3.4.5}$$

$$dq_{jk} = d\bar{t}_{kj} - \sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}dv_{js}, \quad 若\ j < k; \tag{3.4.6}$$

$$dp_{jj} = \mathrm{d}t_j + \sum_{s=1}^{j} t_{js}dv_{sj}; \tag{3.4.7}$$

$$dp_{jk} = \sum_{s=1}^{j} t_{js}dv_{sk}, \quad 若\ j < k; \tag{3.4.8}$$

$$dq_{jk} = -\sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}dv_{js}, \quad 若\ j > k; \tag{3.4.9}$$

$$dq_{jj} = \mathrm{d}t_j - \sum_{s=1}^{j} \bar{t}_{js}dv_{js}; \tag{3.4.10}$$

又由 (3.4.7) 中减去 (3.4.10) 得出

$$d(p_{jj} - q_{jj}) = \sum_{s=1}^{j-1} t_{js}dv_{sj} + 2t_jdv_{jj} + \sum_{s=1}^{j-1} \bar{t}_{js}dv_{js}. \tag{3.4.11}$$

今往算出下列函数行列式之值:

$$J = \left|\frac{\partial(p_{jk}(i>k), q_{jk}(j<k), p_{jj}(1\leqslant j\leqslant n), p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj}-q_{jj}(1\leqslant j\leqslant n))}{\partial(t_{jk}(j>k), \bar{t}_{kj}(j<k), t_j, v_{jk}(1\leqslant j, k\leqslant n))}\right|.$$

由 (3.4.8), (3.4.9) 及 (3.4.11), 其中无有 $\mathrm{d}t_{jk}, d\bar{t}_{kj}$ 及 $\mathrm{d}t_j$, 故得

$$J = \left|\frac{\partial(p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj}-q_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n))}{\partial(v_{jk}(1 \leqslant j,k \leqslant n))}\right|.$$

注意在 (3.4.8) 中仅有 $dv_{pq}(p<q)$, 在 (3.4.9) 中仅有 $dv_{pq}(p>q)$. 若 $dp_{jk}(j<k)$ 写成 $dv_{pq}(p<q)$ 之线性变换, 其方阵乃一三角形者, 而其行列式之值为 $t_1^{(n-1)}t_2^{(n-2)}\cdots t_{n-1}$, 故得出

$$J = 2^n t_1^{2(n-1)+1} t_2^{2(n-2)+1} \cdots t_{n-1}^3 t_n. \tag{3.4.12}$$

由于若 $z = x+iy$, 则

$$\left|\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(x,y)}\right| = 2,$$

故

$$\left|\frac{\partial(p_{jk},q_{jk})}{\partial(t'_{jk},t''_{jk},t_j,v_{jk})}\right| = 2^{n(n-1)}\left|\frac{\partial(p_{jk},q_{jk})}{\partial(t_{jk},\bar{t}_{jk},t_j,v_{jk})}\right|.$$

由此立得

$$\left|\frac{\partial(P,Q)}{\partial(T,V)}\right| = 2^{n^2} t_1^{2(n-1)+1} \cdots n_{t-1}^3 t_n.$$

又因

$$\left|\frac{\partial(Z,\overline{Z})}{\partial(P,Q)}\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial(Z,\overline{Z})}{\partial(X,Y)}\right| = 2^{n^2},$$

故最后得出

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U}.$$

3) 极坐标的体积元素:

定理 3.4.4　由 (3.4.1) 所表出的 Z 与 $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ 之关系的体积元素之关系为

$$\dot{Z} = D^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n \dot{U}[\dot{U}]. \tag{3.4.13}$$

证　命

$$Z\overline{Z}' = H, \quad H = T\overline{T}',$$

由定理 3.4.3 可得

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U}.$$

又由定理 3.4.1 可知

$$\dot{Z} = 2^{-n^2}\dot{H}\dot{U},$$

再由 (3.3.2) 可知

$$\dot{Z} = D^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n \dot{U}[\dot{U}].$$

§3.5 对称方阵的极坐标

命 Z 表一复元素的对称方阵, 作者 (华罗庚 [1]) 曾经证明任一对称方阵可以表成为

$$Z = U\Lambda U', \tag{3.5.1}$$

此处 U 是酉方阵, 而 $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是对角线方阵, 其对角线上的元素适合于

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

命 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 代表酉群 $\mathfrak{U}_n$ 对其分群 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 所成的左傍系的集合, 如此则易证：一般来说, Z 与 $\{\mathfrak{U}_n\} \times \Lambda$ 之间的对应是一对一的.

微分 (3.5.1)

$$dZ = dU\Lambda U' + Ud\Lambda U' + U\Lambda dU',$$

$$\overline{U}'dZ\overline{U} = \delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\delta U',$$

此处 $\delta U = \overline{U}'dU$, 可得

$$\begin{aligned}\sigma(dZd\overline{Z}') &= \sigma(\overline{U}'dZ\overline{U}U'dZ'U)\\ &= \sigma((\delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\delta U')(\Lambda\delta\overline{U}' + d\Lambda + \delta\overline{U}\Lambda))\\ &= \sigma(d\Lambda d\Lambda) + \sigma((\delta U\Lambda + \Lambda\delta U')(\Lambda\delta\overline{U}' + \delta\overline{U}\Lambda)).\end{aligned}$$

命

$$(\delta U\Lambda + \Lambda\delta U') = (dg_{jk}) \quad (dg_{jk} = dg_{kj}),$$

则

$$\sigma(dZd\overline{Z}') = \sum_{j=1}^{n} d\lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{n} |dg_{jj}|^2 + 2\sum_{j<k} |dg_{jk}|^2,$$

其中

$$\begin{aligned}dg_{jk} &= \lambda_k\delta u_{jk} + \lambda_j\delta u_{kj}, \quad j<k,\\ dg_{jj} &= 2i\lambda_j\delta u_{jj}.\end{aligned}$$

由 δu_{jk} 所张成的体积元素可定义为 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的体积元素 $\{\dot{\mathfrak{U}}_n\}$, 即当 $\delta u_{jk} = \delta u'_{jk} + i\delta u''_{jk}$ 时

$$\{\dot{\mathfrak{U}}_n\} = \prod_{j=1}^{n} \delta u_{jj} \prod_{j<k} \delta u'_{jk}\delta u''_{jk};$$

故得

$$\dot{Z} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j<k} |\lambda_j^2 - \lambda_k^2|\lambda_1 \cdots \lambda_n d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \{\dot{\mathfrak{U}}_n\}. \tag{3.5.2}$$

今再讨论实对称方阵的极坐标. 任何实对称方阵 T 可以表成为

$$T = \Gamma\Lambda\Gamma', \tag{3.5.3}$$

此处 Γ 是行列式为 $+1$ 的实正交方阵, 而

$$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n], \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

且易见, 一般说来, 实对称方阵一一对应于 $\{O^+\} \times \Lambda$, 此处 $\{O^+\}$ 表示行列为 $+1$ 的正交群对其分群 $[\pm1, \cdots, \pm1]$ 的左傍系的集合.

微分 (3.5.3), 则得

$$\Gamma' dT \Gamma = \delta\Gamma\Lambda + d\Lambda - \Lambda\delta\Gamma,$$

此处 $\delta\Gamma = \Gamma^{-1}d\Gamma$ 是一斜对称方阵. 因此

$$\sigma(dTdT') = \sigma((\delta\Gamma\Lambda - \Lambda\delta\Gamma)(\delta\Gamma\Lambda - \Lambda\delta\Gamma)') + \sigma(d\Lambda d\Lambda').$$

命 $[\dot{O}^+] = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \delta\gamma_{ij}$, 则用同法可以算出

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| d\lambda_1 \cdots d\lambda_n [\dot{O}^+]. \tag{3.5.4}$$

再命 S 代表一对称酉方阵, 所有的 S 的集合以 $\mathfrak{S}$ 表之. 命 U 是一酉方阵, 今往求出 $\mathfrak{S}$ 上的经变换

$$S_1 = USU' \tag{3.5.5}$$

而不变的积分元素.

命

$$S = (I + iT)(I - iT)^{-1}, \tag{3.5.6}$$

方阵 T 称为 S 的褒变量; 由于 S 是酉方阵, 所以

$$(I + iT)(I - i\overline{T}') = (I - iT)(I + i\overline{T}'),$$

即 T 是爱尔米方阵. 又由于 S 是对称的, 即

$$(I + iT)(I - iT)^{-1} = (I - iT')^{-1}(I + iT'),$$

而得 T 也是对称的. 因之, $T = T' = \overline{T}'$, 即 T 是一个实对称方阵. (3.5.6) 的逆变换是

$$-iT = (I - S)(I + S)^{-1}. \tag{3.5.7}$$

一般言之, (3.5.6) 及 (3.5.7) 建立了 T 与 S 间的一一对应关系. 例外流形的维数低于 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

当 S 由 (3.5.6) 变为 S_1 时, T 亦将变为 T_1. 今往算出 T 与 T_1 间的关系. 把酉方阵 U 分写成虚实部分

$$U = A + Bi, \tag{3.5.8}$$

由 $U\overline{U}' = I$ 可知, A 与 B 是两个适合于

$$AA' + BB' = I, \quad AB' = BA' \tag{3.5.9}$$

的实方阵. 因为

$$\begin{aligned} S_1 =& USU' = (A+Bi)(I+iT)(I-iT)^{-1}\overline{U}^{-1} \\ =& [(A-BT)+(B+AT)i](I-iT)^{-1}(A-iB)^{-1} \\ =& [I+i(B+AT)(A-BT)^{-1}][I-i(B+AT)(A-BT)^{-1}]^{-1}, \end{aligned}$$

得出

$$T_1 = (AT+B)(-BT+A)^{-1}. \tag{3.5.10}$$

由 (3.5.9) 显然得出

$$(AT+B)(-BT+A)^{-1} = (-TB'+A')^{-1}(TA'+B'). \tag{3.5.11}$$

微分 (3.5.10) 并用 (3.5.11) 可得

$$\begin{aligned} dT_1 &= AdT(-BT+A)^{-1} + (AT+B)(-BT+A)^{-1}BdT(-BT+A)^{-1} \\ &= AdT(-BT+A)^{-1} + (-TB'+A')^{-1}(TA'+B')BdT(-BT+A)^{-1} \\ &= (-TB'+A')^{-1}[(-TB'+A')A + (TA'+B')B]dT(-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}dT(-BT+A)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

又由 (3.5.9) 及 (3.5.11) 可得

$$\begin{aligned} I+T_1^2 &= I + (-TB'+A')^{-1}(TA'+B')(AT+B)(-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}[(-TB'+A')(-BT+A)+(TA'+B')(AT+B)](-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}(I+T^2)(-BT+A)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

由 (3.5.12) 可知

$$\dot{T}_1 = (\det(-BT+A))^{-(n+1)}\dot{T},$$

又由 (3.5.13) 得

$$\det(I+T_1^2) = \det(I+T^2)(\det(-BT+A))^{-2},$$

故得

$$(\det(I+T_1^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}_1=(\det(I+T^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}. \tag{3.5.14}$$

用与前面相同的方法 (§3.1) 可以算出

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\det(I+T^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}, \tag{3.5.15}$$

此处 $\dot{T}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod\limits_{j\leqslant k}\mathrm{d}t_{jk}$. 显然有 $\dot{S}=\dot{S}_1$, 这是一不变积分元素, $\mathfrak{S}$ 的总体积由定理 2.1.1 知等于

$$\begin{aligned}\int_S\dot{S}&=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\int_T\det(I+T^2)^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}\\&=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}.\end{aligned}$$

如果用 (3.5.4), 则得

$$\dot{S}=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^2)^{-\frac{n+1}{2}}d\lambda_1\cdots d\lambda_n\{\dot{O}^+\}. \tag{3.5.16}$$

命

$$e^{i\theta_\nu}=\frac{1+i\lambda_\nu}{1-i\lambda_\nu},$$

由于 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$, 故可命 $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$, 易得

$$e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}=\frac{2i(\lambda_\nu-\lambda_\mu)}{(1-i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\mu)},$$

即

$$|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|=\frac{2|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{(1+\lambda_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda_\mu^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即得

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|=\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{\nu<\mu}|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+\lambda_\nu^2)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{3.5.17}$$

另一方面

$$d\theta_\nu=\left(\frac{1}{1+i\lambda_\nu}+\frac{1}{1-i\lambda_\nu}\right)d\lambda_\nu=\frac{2}{1+\lambda_\nu^2}d\lambda_\nu. \tag{3.5.18}$$

由 (3.5.16), (3.5.17) 及 (3.5.18) 可得

$$\dot{S} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{1\leqslant \nu<\mu\leqslant n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| d\theta_1 \cdots d\theta_n \{\dot{O}^+\}. \tag{3.5.19}$$

附记 本书中建议以下的结果：任一对称酉方阵 S 可以表成为

$$S = \Gamma \Lambda \Gamma',$$

此处 Γ 是一实正交方阵, 其行列式等于 1 及 $\Lambda = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]$.

§3.6 斜对称方阵的极坐标

作者 (华罗庚 [1]) 曾证明任一复元素的斜对称方阵 Z 可以表成为

$$UMU', \tag{3.6.1}$$

此处 U 是酉方阵而

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\nu \geqslant 0.$$

如果 n 是偶数, 这直和止于 $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_\nu \\ -\lambda_\nu & 0 \end{pmatrix}$, 此处 $\nu = \left[\frac{1}{2}n\right]$. 不然在此项之后再加上 "$\dot{+}0$".

今将讨论形如

$$K = \Gamma F \Gamma' \tag{3.6.2}$$

的斜对称方阵, 此处 Γ 是实正交方阵之行列式等于 1 者, 而

$$F = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2} \\ -e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots, \quad \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0.$$

当 n 是偶数时, 任一斜对称酉方阵可以表成为 (3.6.2) 的形式, 但 Γ 的行列式可能是 ±1. 可注意者：当 (3.6.2) 中的实裹变量当作复变数时, (3.6.2) 可以代表斜对称方阵所成的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维 (实) 流形.

方阵 (3.6.2) 的集合用 $\mathfrak{K}$ 表示. 如果两组 (Γ, F) 及 (Γ_1, F_1) 代表同一方阵, 即

$$\Gamma F \Gamma' = \Gamma_1 F_1 \Gamma_1',$$

则得 $F = F_1$, 且当 $\pi > \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_\nu > 0$ 时

$$\Gamma = \Gamma_1 \Delta,$$

此处

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots. \tag{3.6.3}$$

最后的尾巴视 n 是偶数或奇数而为

$$\begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \dot{+} 1.$$

我们也用 Γ 代表正交方阵行列式为 1 者所成的群, Δ 也表 (3.6.3) 所成的群, $\Sigma = \Gamma/\Delta$ 代表 Γ 对其子群 Δ 的左傍系的集合, 如此可知: 一般言之, $\mathfrak{K}$ 上的点与 Σ 中的一傍系及一个 F 一一对应.

微分 (3.6.2) 可得

$$dK = d\Gamma F\Gamma' + \Gamma dF\Gamma' + \Gamma F d\Gamma'.$$

再命 $\delta\Gamma = \Gamma' d\Gamma$, 如此得出

$$\Gamma' dK \Gamma = \delta\Gamma F + dF - F\delta\Gamma$$

及

$$\Gamma' d\overline{K}' \Gamma = -\overline{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma\overline{F}' + d\overline{F}',$$

可知

$$\begin{aligned} \sigma(dK \cdot d\overline{K}') &= \sigma(\Gamma' dK \Gamma \cdot \Gamma' d\overline{K}' \Gamma) \\ &= \sigma((\delta\Gamma F + F\delta\Gamma)(\delta\Gamma\overline{F}' - \overline{F}'\delta\Gamma)) - \sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma)d\overline{F}') \\ &\quad + \sigma(dF(-\overline{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma\overline{F}')) + \sigma(dFd\overline{F}'). \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

由于

$$dF = iF[d\theta_1, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_2, \cdots],$$

可知

$$\sigma(dFd\overline{F}') = 2(d\theta_1^2 + \cdots + d\theta_\nu^2). \tag{3.6.5}$$

又由于 $dF\overline{F}' = \overline{F}'dF$, 可知

$$\sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma)d\overline{F}') = \sigma(\delta\Gamma F d\overline{F}') - \sigma(\delta\Gamma d\overline{F}' F) = 0 \tag{3.6.6}$$

及

$$\sigma(dF(-\overline{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma\overline{F}')) = 0. \tag{3.6.7}$$

更有

$$\sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma)(\delta\Gamma\overline{F}' - \overline{F}'\delta\Gamma)) = 2\sigma(\delta\Gamma F\delta\Gamma\overline{F}') - 2\sigma(\delta\Gamma^2\overline{F}'F). \tag{3.6.8}$$

总括 (3.6.4), (3.6.8) 可得

$$\sigma(dKd\overline{K}') = 2\sigma(\delta\Gamma F\delta\Gamma\overline{F}') - 2\sigma(\delta\Gamma^2\overline{F}'F) + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \tag{3.6.9}$$

形式上虽然有 $\frac{1}{2}n(n-1)+\nu$ 个变数 $\delta\gamma_{\alpha\beta}(1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n)$ 及 $d\theta_\alpha(1 \leqslant \alpha \leqslant \nu)$ 的二次型, 实质上, 它并不含有 $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \cdots$; 换言之, 它是一个 $\frac{1}{2}n(n-1)-\nu+\nu = \frac{1}{2}n(n-1)$ 个变数的二次型. 以下我们将具体地算出这微分二次型及其行列式 (即体积元素).

定理 3.6.1　流形 $\mathfrak{K}$(由 (3.6.2) 所定义的) 的容积元素是

$$\dot{K} = a\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha\dot{\Sigma}, \tag{3.6.10}$$

此处

$$a = \begin{cases} 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}, & \text{当 } n = 2\nu, \\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu}, & \text{当 } n = 2\nu+1. \end{cases}$$

$\dot{\Sigma}$ 及傍系集合 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上的容积元素, 更具体些, $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ 是 $\delta\gamma_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant \nu)$ 的乘积, 但其中除掉 $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \cdots$ 诸项 (项数是 ν).

证　先假定 $n = 2\nu$ 是偶数. 把 $\delta\Gamma$ 及 F 分裂为二行二列的小方阵

$$\delta\Gamma = (\delta\Gamma_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant\nu}, \quad (\delta\Gamma_{\alpha\beta})' = -\delta\Gamma_{\beta\alpha}$$

及

$$F = F_1 \dotplus \cdots \dotplus F_\nu,$$

此处

$$F_\alpha = e^{i\theta_\alpha}F_0, \overline{F}'_\alpha = -e^{-i\theta_\alpha}F_0, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

代进 (3.6.9) 可得

$$\begin{aligned} \sigma(dKd\overline{K}') &= 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu}\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_\beta\delta\Gamma_{\beta\alpha}\overline{F}'_\alpha) - 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu}\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\beta\alpha}) + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 \\ &= -2\sum_{\alpha=1}^{\nu}(\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0) + \sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}\delta\Gamma_\alpha)) \\ &\quad + 4\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + \cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_0\delta\Gamma'_{\alpha\beta}F_0)) \end{aligned}$$

$$+2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \tag{3.6.11}$$

首先

$$\delta\Gamma_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix},$$

由此得到

$$\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0) + \sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\alpha}) = 0. \tag{3.6.12}$$

又命

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} &4\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + 4\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_0\delta\Gamma'_{\alpha\beta}F_0) \\ =& 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)(bc - ad)), \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

这是 a, b, c, d 四个变数的二次型, 它的行列式等于

$$4^4 \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

由 (3.6.12) 及 (3.6.13) 可见 (3.6.11) 是一个 $4\frac{1}{2}\nu(\nu-1) + \nu = \frac{1}{2}n(n-1)$ 个变数的二次型, 它的行列式等于

$$4^{2\nu(\nu-1)} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha) \cdot 2^\nu.$$

由此, $\mathfrak{K}$ 的体积元素等于

$$2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \dot{\Sigma}. \tag{3.6.14}$$

再讨论 $n = 2\nu + 1$ 是奇数的情况. 把 $\delta\Gamma$ 与 F 分裂为

$$\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1^{(2\nu)} & \delta v \\ -\delta v' & 0 \end{pmatrix}, \quad F = F^{(2\nu)} \dot{+} 0.$$

代进 (3.6.9) 可得

$$\begin{aligned} \sigma(dKd\overline{K}') =& 2\sigma\left(\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 F_1 & 0 \\ -\delta v' F_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 \overline{F}'_1 & 0 \\ -\delta v' \overline{F}'_1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &-2\sigma\left(\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1\delta\Gamma_1 - \delta v\delta v' & \delta\Gamma_1\delta v \\ -\delta v'\delta\Gamma_1 & -\delta v'\delta v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 \end{aligned}$$

$$= 2\sigma(\delta\Gamma_1 F_1 \delta\Gamma_1 \overline{F}'_1) - 2\sigma(\delta\Gamma_1\delta\Gamma_1) + 2\sigma(\delta v \delta v') + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2.$$

由本证明上半段的结果可知, $\mathfrak{K}$ 上的容积元素是

$$2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \cdot 2^\nu \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \dot{\Sigma}. \tag{3.6.15}$$

现在我们再研究下列方阵所成的集合

$$K = UDU', \tag{3.6.16}$$

此处 U 是一酉方阵而

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots.$$

当 n 是偶数时, 最末项是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 不然, 则最末项是 0. 当 n 是偶数时, (3.6.16) 就是 (3.6.2); 但当 n 是奇数时, 却不相同. 前已知 (3.6.2) 的 (实) 维数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 今往证明: 当 n 为奇数时, (3.6.16) 的维数等于 $\frac{1}{2}n(n+1)-1$. 由 $UDU' = D$ 可得

$$UD^2 = D^2U,$$

故

$$U = \begin{pmatrix} U_1^{(n-1)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

而 U_1 是 $n-1$ 行列的酉方阵. 由

$$U_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) U_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 U_1 是辛酉方阵. $n-1$ 行列辛酉群的维数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 故对一个固定的 K, 适合 (3.6.16) 的不同的 U 的集合的维数是 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$. 酉群的维数是 n^2, 故 (3.6.16) 所定义的集合的维数等于

$$n^2 - \left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right) = \frac{1}{2}n(n+1) - 1.$$

又此时 K 的集合的总体积 (即 $\mathfrak{C}_{\rm III}$ 的体积) 可由 n 为偶数的情形推出 (见 §4.8).

§3.7 实正交群的体积及其一个应用

作为一个附录，我们现在叙述一下实正交群的积分元素及其体积. 附在这儿来叙述的原因是由于所用的方法是一样的.

现在先研究 n 行列的实正交群 O_n，即适合以下关系的 n 行列的实方阵 T：

$$TT' = I. \tag{3.7.1}$$

显然有 $\det T = \pm 1$. 行列式为 $+1$ 的正交方阵所成的群用 O_n^+ 表示. 对应于一个 T 可以做一个方阵

$$K = (I - T)(I + T)^{-1}, \tag{3.7.2}$$

但 $\det(I + T) = 0$ 的情形必须除外. 现在对 $\det(I + T) = 0$ 的情形我们不能说“一般说来不成立”，因为任一行列式为 -1 的 T，一定使 $\det(I + T) = 0$(此点可由 $\det(I + T) = \det(TT' + T) = \det T \det(T' + I) = -\det(I + T)$ 知之)，所以现在限定 T 属于 O_n^+. 由 (3.7.1) 立得

$$K = -K'; \tag{3.7.3}$$

解 (3.7.2) 立得

$$T = (I - K)(I + K)^{-1}. \tag{3.7.4}$$

由于 $\det(I - K) = \det(I - K') = \det(I + K)$，也可知 $\det T = +1$.

微分 (3.7.4) 可得

$$dT = -2(I + K)^{-1}dK(I + K)^{-1},$$

因此

$$\sigma(dTdT') = -4\sigma(dK(I - K^2)^{-1}dK(I - K^2)^{-1}). \tag{3.7.5}$$

把 dK 写成 (dk_{ij})，其中 $dk_{ij} = -dk_{ji}$；把 $(I - K^2)^{-1}$ 写成 (u_{st})，其中 $u_{st} = u_{ts}$，则 (3.7.5) 变成为

$$8\sum_{i<j}\sum_{s<t}(u_{js}u_{it} - u_{is}u_{jt})dk_{ij}dk_{st},$$

故得出积分元素

$$\dot{T} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det(I - K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}, \tag{3.7.6}$$

此处

$$\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}.$$

所以正交群 O_n^+ 的总体积是

$$\int \dot{T} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \int \underset{K}{\cdots} \int \det(I-K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)} \dot{K}.$$

由 (2.1.4) 可知

$$\int \dot{T} = 2^{\frac{3}{4}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)}. \tag{3.7.7}$$

现在我们可以算出流形 $\mathfrak{R}$ 的总体积. 先证

定理 3.7.1　我们有等式

$$\int \underset{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0}{\cdots} \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha) d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}} \tag{3.7.8}$$

及

$$\int \underset{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0}{\cdots} \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} (\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)(\nu-2)}} \tag{3.7.9}$$

证　由于

$$\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha) = \frac{1}{4}|e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}|^2$$

及 $e^{in\theta}$ 的正交性质可知

$$\int \underset{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0}{\cdots} \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha) d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{1}{\nu! 2^\nu \cdot 2^{\nu(\nu-1)}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} |e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{(2\pi)^\nu \nu!}{\nu! 2^{\nu^2}} = \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}.$$

又由于 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1), \cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\cos m\theta + \cdots$ 及 $\cos m\theta$ 的正交性质可知

$$\int \underset{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0}{\cdots} \int \left(\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} (\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha) \right)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\det \begin{pmatrix} \cos^{\nu-1}\theta_1, & \cdots, & \cos^{\nu-1}\theta_\nu \\ \cos^{\nu-2}\theta_1, & \cdots, & \cos^{\nu-2}\theta_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \cdots, & 1 \end{pmatrix} \right)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{1}{2^{\nu}\cdot\nu!2^{(\nu-1)(\nu-2)}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\det\begin{pmatrix}\cos(\nu-1)\theta_1, & \cdots, & \cos(\nu-1)\theta_\nu\\ \cos(\nu-2)\theta_1, & \cdots, & \cos(\nu-2)\theta_\nu\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 1, & \cdots, & 1\end{pmatrix}\right)^2 d\theta_1\cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{(2\pi)^{\nu}\cdot\nu!}{2^{\nu}\cdot\nu!2^{(\nu-1)(\nu-2)}} = \frac{\pi^{\nu}}{2^{(\nu-1)(\nu-2)}}.$$

今往研究形式如

$$G = \Gamma M \Gamma' \tag{3.7.10}$$

的正交方阵 G 的集合, 式中 Γ 是行列式为 1 的正交方阵且

$$M = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix} \dotplus \cdots, \quad \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0. \tag{3.7.11}$$

当 $n = 2\nu$ 时, 此直和终止于 $\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}$; 而当 $n = 2\nu+1$ 时, 它终止于

$$\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix} \dotplus 1. \tag{3.7.12}$$

同时我们也用 G 代表此集合, $V(G)$ 表示 G 的体积. 当 n 是奇数时, (3.7.10) 包括所有的行列式为 $+1$ 的正交方阵, 所以由 (3.7.7),

$$V(G) = (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-1)\right)}{\Gamma(\alpha-1)}; \tag{3.7.13}$$

当 n 是偶数时, 任一行列式为 $+1$ 的正交方阵可以表成为 (3.7.10) 的形式, 但 $\det\Gamma$ 可能是 ±1, 因之

$$V(G) = \frac{1}{2}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-1)\right)}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{3.7.14}$$

现在再用另一方法来计算 $V(G)$. 若

$$G = \Gamma M\Gamma' = \Gamma_1 M_1 \Gamma_1', \quad \pi > \theta_1 > \cdots > \theta_\nu > 0,$$

则得 $\Gamma = \Gamma_1\Delta$, 其中

$$\Delta = \begin{pmatrix}\cos\delta_1 & \sin\delta_1\\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1\end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix}\cos\delta_2 & \sin\delta_2\\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2\end{pmatrix} \dotplus \cdots.$$

因而一般言之, G 上的任一点可以用 $\boldsymbol{\Sigma}(=\boldsymbol{\Gamma}/\Delta)$ 的一个傍系及一个 M 来表示, 并且表法是唯一的 (可能有较低维的流形必须除外).

利用已往屡用的方法可以证得 G 的体积元素等于

$$\dot{G}=b\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha^2\dot{\Sigma},$$

此处

$$b=\begin{cases}2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}, & 若\ n=2\nu,\\ 2^{2\nu^2+\frac{1}{2}\nu}, & 若\ n=2\nu+1.\end{cases}$$

如果命

$$V(\boldsymbol{\Sigma})=\int\cdots\int_{\Sigma}\dot{\Sigma},$$

则得

$$\begin{aligned}V(G)&=bV(\Sigma)\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu\geqslant 0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2d\theta_1\cdots d\theta_\nu\\&=bV(\boldsymbol{\Sigma})\frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)(\nu-2)}}.\end{aligned}\tag{3.7.15}$$

再由定理 3.6.1 可知

$$\frac{1}{c}=aV(\boldsymbol{\Sigma})\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu\geqslant 0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\alpha-\theta_\beta)d\theta_1\cdots d\theta_\nu,$$

又由 (3.7.8) 可知

$$\frac{1}{c}=aV(\boldsymbol{\Sigma})\frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}.\tag{3.7.16}$$

合并 (3.7.15) 及 (3.7.16) 可见

$$\frac{1}{c}=\frac{a}{b}\frac{1}{2^{2\nu-2}}V(G).$$

命

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{a}{b}, & 若\ n\ 是奇数,\\ \dfrac{a}{2b}, & 若\ n\ 是偶数,\end{cases}$$

则得

$$\frac{1}{c}=\lambda\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

此处

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 若\ n\ 是偶数, \\ 2^{-\nu}, & 若\ n\ 是奇数. \end{cases}$$

当 n 是偶数时, $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 相同, 因此, n 是偶数时 $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 的总体积也已经算出.

第四章　若干一般性的定理及其应用

§4.1　引　　言

命 $\mathfrak{R}$ 表示由 n 个复变数 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 所定义的 $2n$ 维欧氏空间的一个有界域. 习知, $\mathfrak{R}$ 内的解析函数 $f(z)$ 的模最大绝对值不能在 $\mathfrak{R}$ 的内点取得 (除 $f(z)$ 是常数外). 命 $\mathfrak{L}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的边界的一部分, 且有以下的性质: (i) $\mathfrak{R}$ 上的每一解析函数的模最大绝对值在 $\mathfrak{L}$ 上取得; (ii) 对 $\mathfrak{L}$ 上的任一点 ξ, 我们可以找到一个 $\mathfrak{R}$ 内的解析函数, 模在 $z = \xi$ 时取最大绝对值. 这个流形 $\mathfrak{L}$ 称为 $\mathfrak{R}$ 的特征流形. 显然它是由 $\mathfrak{R}$ 唯一决定的, 并且不难证明 $\mathfrak{L}$ 是紧致的, 而且如果一个函数在 $\mathfrak{L}$ 上定义且在 $\mathfrak{L}$ 上每一点有一邻域在其中这函数是解析的, 则这函数就唯一决定了. 由此推出 $\mathfrak{L}$ 的实维数一定 $\geqslant n$. 以 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \xi$ 表 $\mathfrak{L}$ 上的变数, 且以 $d\xi\overline{d\xi}' = \sum_{i=1}^{n} |d\xi_i|^2$ 表 $\mathfrak{L}$ 上的微分度量, 并以 $\dot{\xi}$ 表其体积元素.

如果有一解析变换把 $\mathfrak{R}$ 变为其自己, 则它也把 $\mathfrak{L}$ 变为其自己. 特别是 $\mathfrak{L}$ 经 $\mathfrak{R}$ 的稳定群而不变. 如果 $\mathfrak{R}$ 经变换 $z = e^{i\theta}w$ 而不变, 则域 $\mathfrak{R}$ 称为圆型的. 由此推出, 如果 $\mathfrak{R}$ 是圆型的, 则 $\mathfrak{L}$ 也是圆型的.

现在假定 $\mathfrak{R}$ 是圆型域. 考虑矢量 $z^{[f]}$, 其支量是

$$\sqrt{\frac{f!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}}z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}, \quad a_1 + \cdots + a_n = f. \tag{4.1.1}$$

这矢量 $z^{[f]}$ 的维数等于

$$N_f = \frac{1}{f!}n(n+1)\cdots(n+f-1) = \begin{pmatrix} n+f-1 \\ f \end{pmatrix}.$$

当 $f \neq g$ 时,

$$\int_{\mathfrak{R}} \overline{z^{[f]}}' z^{[g]} \dot{z} = 0$$

及

$$\int_{\mathfrak{L}} \overline{\xi^{[f]}}' \xi^{[g]} \dot{\xi} = 0.$$

其证明是: 用变换 $z = e^{i\theta}w$, 则

$$\int_{\mathfrak{R}} \overline{z^{[f]}}' z^{[g]} \dot{z} = e^{\overline{i(f-g)\theta}} \int_{\mathfrak{R}} \overline{w^{[f]}}' w^{[g]} \dot{w}.$$

由于 $e^{i(f-g)\theta}\neq 1$, 故得所证.

命

$$\int_{\mathfrak{R}}\overline{z^{[f]}}'z^{[f]}\dot{z}=H_1 \tag{4.1.2}$$

及

$$\int_{\mathfrak{C}}\overline{\xi^{[f]}}'\xi^{[f]}\dot{\xi}=H_2, \tag{4.1.3}$$

这是两个 N_f 阶的定正爱尔米方阵. 因此有一方阵 Γ 使

$$\overline{\Gamma}'H_1\Gamma=\Lambda,\quad \overline{\Gamma}'H_2\Gamma=I(=I^{(N_f)}),$$

这儿 Λ 是一对角线方阵

$$\Lambda=[\beta_1^f,\cdots,\beta_{Nf}^f].$$

命 $z_f=z^{[f]}\Gamma$ 及 $\xi_f=\xi^{[f]}\Gamma$, 并以 $\{\varphi_\nu^f(z)\}$ 表矢量 z_f 的支量, 则

$$\int_{\mathfrak{R}}\varphi_\nu^f(z)\overline{\varphi_\mu^g(z)}\dot{z}=\delta_{\nu\mu}\delta_{fg}\beta_\nu^f \tag{4.1.4}$$

及

$$\int_{\mathfrak{C}}\varphi_\nu^f(\xi)\overline{\varphi_\mu^g(\xi)}\dot{\xi}=\delta_{\nu\mu}\delta_{fg}. \tag{4.1.5}$$

因此

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta_\nu^f}}\varphi_\nu^f(z)\right\}$$

是 $\mathfrak{R}$ 上的一个正交正常系.

习知 (H. Cartan[1])

定理 4.1.1　对一个完整圆型域 $\mathfrak{R}$, 函数系

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_\nu^f}}\varphi_\nu^f(z),\quad \nu=1,2,\cdots,N_f,\quad f=0,1,2,\cdots \tag{4.1.6}$$

成一个 $\mathfrak{R}$ 上的完整正交正常系.

虽然如此, $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$ 是一个正交正常系, 但在 $\mathfrak{C}$ 上一般是不完整的 (在连续函数所成的空间中).

已知

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}\frac{\varphi_\nu^f(z)\overline{\varphi_\nu^f(w)}}{\beta_\nu^f}=K(z,\overline{w})$$

是 Bergman 核, 对任一 z 及任一 $\mathfrak{R}$ 的内点 w 这级数是一致收敛的.

我们定义

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}\varphi_\nu^f(z)\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}=H(z,\bar{\xi})$$

为 $\mathfrak{R}$ 的 Cauchy 核 (假定它是收敛).

我们还定义

$$P(z,\xi)=\frac{|H(z,\bar{\xi})|^2}{H(z,\bar{z})}$$

是域 $\mathfrak{R}$ 的 Poisson 核.

本章的目的在于给出若干直接求出这些核的方法.

§4.2 核 函 数

假定有界域 $\mathfrak{R}$ 包有原点为其内点. 命 Γ 表变 $\mathfrak{R}$ 为其自己的群, 其中的元素是解析变换. 使原点不变的诸变换所成的分群以 Γ_0 表示. 习知 (H. Cartan[1]), Γ_0 中任一元素由它的线性项唯一地决定, 即

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}z_j+\text{高次项}. \tag{4.2.1}$$

当 u_{ij} 已定之后, 此变形便唯一地决定了. 已知群 Γ_0 是紧致的, 因此不妨假定 (经过必须的线性变换)(u_{ij}) 是酉方阵, 以 U 表示. 有时, 我们就用 U 来表变形 (4.2.1), 假如 $U\in\Gamma_0$ 是指变形 (4.2.1) 而言.

研究傍系 Γ/Γ_0. 同一傍系中的变形都变同一点 a 为 0, 这些 a 组成 $\mathfrak{R}$ 内的一个点集, 以 $\mathfrak{M}$ 表示. $\mathfrak{M}$ 可以称为 $\mathfrak{R}$ 内群 Γ 与原点相当的可递集合, 所以 Γ 中的元素是由 $\mathfrak{M}$ 中的一点及 Γ_0 中的一个酉方阵唯一决定的. 把它写为

$$w=f(z;a,U),\quad a\in\mathfrak{M},\quad U\in\Gamma_0. \tag{4.2.2}$$

命

$$z=f(x;b,V),\quad b\in\mathfrak{M},\quad V\in\Gamma_0 \tag{4.2.3}$$

是另一变换, 而

$$w=f(f(x,b,V);a,U)=f(x;c,W) \tag{4.2.4}$$

是 (4.2.2) 与 (4.2.3) 的乘积; 又命 $w=0$, 立刻得出

$$a=f(c;b,V). \tag{4.2.5}$$

微分 (4.2.4) 可得

$$\frac{\partial f_i(x;c,W)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(z;a,U)}{\partial z_k}\frac{\partial f_k(x;b,V)}{\partial x_j}. \tag{4.2.6}$$

变形 (4.2.2) 的函数方阵以

$$J(\boldsymbol{z};a,U)=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{z};a,U)}{\partial \boldsymbol{z}_j}$$

表之. 在 (4.2.6) 中取 $x=c$, 则 $z=a$, 因而得出

$$J(c;c,W)=J(a;a,U)J(c;b,V),$$

即当由 (4.2.5) 把 c 点变为 a 点时, $J(c;c,W)$ 变为 $J(a;a,U)$ 和变形 (4.2.5) 的函数方阵的乘积. 换符号即得

$$J(x;x,W)=J(z;z,U)J(x;b,V). \tag{4.2.7}$$

此式当 x 与 z 都在 $\mathfrak{M}$ 上时成立, 而 x 与 z 之间有关系

$$z=f(x;b,V). \tag{4.2.8}$$

若另有一变形

$$u=f(x;b,V_0),$$

则由 u 到 z 的变形是使原点不变的; 因之,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0}=U_0$$

是一酉方阵. 由此即得

$$[J(x;b,V)]_{x=b}=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0}[J(x;b,V_0)]_{x=b},$$

所以

$$J(b;b,V)=U_0J(b;b,V_0), \tag{4.2.9}$$

此处 U_0 是 Γ_0 中的一个酉方阵. 因此得出

$$\overline{J(z;z,V)'}J(z;z,V)=\overline{J(z;z,V_0)'}J(z;z,V_0). \tag{4.2.10}$$

此说明 $\bar{J}'J$ 只与 Γ/Γ_0 中把 z 变为 0 的傍系有关, 而与傍系中的元素无关, 因此可命

$$|\det J(z;z,V)|^2=Q(z,\bar{z}).$$

由 (4.2.7) 可知

$$Q(x,\bar{x}) = Q(z,\bar{z})|\det J(x;b,V)|^2, \tag{4.2.11}$$

此式当 z 与 x 都在 $\mathfrak{M}$ 上且 x 与 z 之间有关系 (4.2.8) 时成立.

S. Bergman[1] 证明了域 $\mathfrak{R}$ 的核函数 $K(z,\bar{z})$ 经过变换 (4.2.8) 时也常有

$$K(x,\bar{x}) = K(z,\bar{z})|\det J(x;b,V)|^2, \tag{4.2.12}$$

因此得出: 若 x 与 z 同在 $\mathfrak{M}$ 上, 则

$$\frac{K(x,\bar{x})}{Q(x,\bar{x})} = \frac{K(z,\bar{z})}{Q(z,\bar{z})}. \tag{4.2.13}$$

定理 4.2.1 如果 $\mathfrak{R}$ 是圆型有界星状域, 则当 z 在 $\mathfrak{M}$ 上时

$$K(z,\bar{z}) = \frac{1}{\Omega}Q(z,\bar{z}),$$

此处 Ω 是 $\mathfrak{R}$ 域的体积.

证 由 §4.1 可知, $\mathfrak{R}$ 中正常正交函数系可由次法得之: 把

$$z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}, \quad a_1+\cdots+a_n=m$$

的诸项正交正常化, 再命 $m=1,2,\cdots$, 即得 $\mathfrak{R}$ 域中完整的正交正常系, 亦即有一个函数是常数, 它就是 $\frac{1}{\sqrt{\Omega}}$, 并有 $\frac{1}{m!}n(n+1)\cdots(n+m-1)$ 个 m 次齐次式. 概括言之, 有一完整正常正交系 $\{\varphi_\nu(z)\}, \nu=0,1,2,\cdots$, 其中

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}, \quad \varphi_\nu(0)=0, \quad 当\ \nu\geqslant 1.$$

故由

$$K(z,\bar{z})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(z)},$$

立得

$$K(0,0)=\frac{1}{\Omega}.$$

另一方面, 由 $Q(z,\bar{z})$ 的定义可知 $Q(0,0)=1$. 由此得本定理.

再假定 $\mathfrak{R}$ 是可递域, 今往说明 $Q(z,\bar{z})$ 的几何意义. 由 (4.2.7) 可知

$$J(x;x,W)dx' = J(z;z,U)dz',$$

因之得出

$$\overline{dx}\ \overline{J(x;x,W)'}J(x;x,W)dx' = \overline{dz}\ \overline{J(z;z,U)'}J(z;z,U)dz'.$$

此不变型可以看成为本空间的度量. 根据这度量, 体积元素等于

$$|\det J(z;z,U)|^2\dot{z}=Q(z,\bar{z})\dot{z}.$$

因此, $Q(z,\bar{z})$ 可以称为体积密率.

由定理 4.2.1 可知:

任一有界圆型可递域的核函数等于体积密率与欧几里得体积之比.

以下几节就根据这一原理而不经过正常正交完整系的求得直接算出四种典型域的核函数.

§4.3　典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}},\mathfrak{R}_{\mathrm{II}},\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的核函数

1° 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的群 Γ 是由以下的变形:

$$Z_1=(AZ+B)(CZ+D)^{-1},\tag{4.3.1}$$

$$A=A^{(m)},\quad B=B^{(m,n)},\quad C=C^{(n,m)},\quad D=D^{(n)},$$

$$\bar{A}A'-\bar{B}B'=I^{(m)},\quad \bar{A}C'=\bar{B}C',\quad \bar{C}C'-\bar{D}D'=-I^{(n)}$$

组成的 (华罗庚 [1]). 当 $m=n$ 时, 我们还得假定

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=+1.\tag{4.3.2}$$

今往求出把任一点 P 变为原点的变形. 由定义可知

$$I-\bar{P}P'>0;$$

由定理 2.1.2 也知

$$I-P'\bar{P}>0.$$

习知有一 m 行列的方阵 Q 及一 n 行列的方阵 R 使

$$\bar{Q}(I^{(m)}-\bar{P}P')Q'=I,\quad \bar{R}(I^{(n)}-P'\bar{P})R'=I.\tag{4.3.3}$$

变形

$$Z_1=Q(Z-P)(I-\bar{P}'Z)^{-1}R^{-1}\tag{4.3.4}$$

变 P 为 0. 也可证明这变形属于 (4.3.1).

微分 (4.3.4) 可知

$$dZ_1=Q[dZ(I-\bar{P}'Z)^{-1}+(Z-P)d((I-\bar{P}'Z)^{-1})]R^{-1};$$

命 $Z=P$, 得

$$dZ_1=QdZ(I-\bar{P}'P)^{-1}R^{-1}=QdZ\bar{R}'.$$

这就是在 P 点

$$\dot{Z}_1 = |(\det Q)^m (\det \bar{R}')^n|^2 \dot{Z} = \det(I - P\bar{P}')^{-m-n} \dot{Z},$$

即得

$$Q(Z, \overline{Z}) = \det(I - Z\overline{Z}')^{-m-n}.$$

由上节的结果可知

定理 4.3.1　域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})}(\det(I - Z\overline{Z}'))^{-m-n}, \tag{4.3.5}$$

此处由 (2.2.2) 知

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}) = \frac{(m-1)!\cdots 2!1!(n-1)!\cdots 2!1!}{(m+n-1)!\cdots 2!1!}\pi^{mn}.$$

2° 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的群 Γ 是变形

$$Z_1 = (AZ + B)(\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} \tag{4.3.6}$$

组成的, 此处

$$A'\bar{B} = \bar{B}'A, \quad \bar{A}'A - B'\bar{B} = I.$$

命 P 表 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 中的一点, 有一方阵 R 使

$$\bar{R}(I - \bar{P}P')R' = I. \tag{4.3.7}$$

变形

$$Z_1 = R(Z - P)(I - \bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1} \tag{4.3.8}$$

属于 Γ, 并且它把 P 变为 0.

微分 (4.3.8) 得

$$dZ_1 = R(dZ(1 - \bar{P}Z)^{-1} + (Z - P)d(I - \bar{P}Z)^{-1})\bar{R}^{-1}.$$

命 $Z = P$ 得

$$dZ_1 = RdZ(I - \bar{P}P)^{-1}\bar{R}^{-1} = RdZR'.$$

因此得出在 P 点有

$$\dot{Z}_1 = |(\det R)^{n+1}|^2 \dot{Z} = \frac{1}{\det(I - P\bar{P})^{n+1}}\dot{Z}.$$

从而

$$Q(Z, \overline{Z}) = \det(I - Z\overline{Z})^{-n-1}.$$

定理 4.3.2　域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}})}\det(I-Z\overline{Z})^{-n-1}, \tag{4.3.9}$$

此处由 (2.3.2) 知

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}})=\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}\frac{(2n-2)!\cdots 4!2!}{(2n-1)!(2n-2)!\cdots n!}.$$

3° 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的群 Γ 是由变形

$$Z_1=(AZ+B)(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1} \tag{4.3.10}$$

组成的, 此处

$$A'\bar{B}=-\bar{B}'A,\quad A'\bar{A}-\bar{B}'B=I.$$

命 P 是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 中的一点, 即

$$I+P\bar{P}>0.$$

若有一 Q 使

$$\bar{Q}(I+P\bar{P})Q'=I,$$

则 Γ 中有一变形

$$Z_1=Q(Z-P)(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \tag{4.3.11}$$

变 P 为 0.

微分 (4.3.11) 得

$$dZ_1=Q(dZ(I+\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)d(I+\bar{P}Z)^{-1})\bar{Q}^{-1}.$$

命 $Z=P$ 得

$$dZ_1=QdZ(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}=QdZQ'.$$

因此得出在 P 点

$$\dot{Z}_1=|(\det Q)^{n-1}|^2\dot{Z}=\det(I+P\bar{P})^{-n+1}\dot{Z},$$

于是

$$Q(Z,\overline{Z})=(\det(I+Z\overline{Z}))^{-n+1}.$$

定理 4.3.3　域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{III}})}\det(I+Z\overline{Z})^{-n+1},$$

此处由 (2.4.2) 知

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{III}})=\frac{(2n-4)!\cdots 4!2!}{(2n-3)!\cdots n!(n-1)!}\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

§4.4　域 $\mathfrak{R}_{\text{IV}}$ 的核函数

域 $\mathfrak{R}_{\text{IV}}$ 的群 Γ 是由变形

$$w=\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'+zB'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$
$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)C'+zD'\right\}\tag{4.4.1}$$

组成的, 此处 $A=A^{(2)},B=B^{(2,n)},C=C^{(n,2)},D=D^{(n)}$ 是实矩阵, 且适合于 (华罗庚 [2])

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\tag{4.4.2}$$

及

$$\det A>0.\tag{4.4.3}$$

今往写出 Γ 中把任一点 z_0 变为原点的变形. 由 z_0 作一 $2\times n$ 的矩阵

$$X_0=2\begin{pmatrix}z_0z_0'+1, & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1, & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar z_0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1-|z_0z_0'|^2}\begin{pmatrix}z_0+\bar z_0-(\overline{z_0z_0'}z_0+z_0z_0'\bar z_0)\\ i(z_0-\bar z_0)+i(\overline{z_0z_0'}z_0-z_0z_0'\bar z_0)\end{pmatrix}.\tag{4.4.4}$$

这一矩阵显然是实的, 由此作出

$$I-X_0X_0'=\overline{\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}}^{-1}\left\{\overline{\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}}\right.$$
$$\left.\times\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}'-4\overline{\begin{pmatrix}z_0\\ \bar z_0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar z_0\end{pmatrix}'\right\}$$
$$\times\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}'^{-1}$$
$$=2\begin{pmatrix}z_0z_0'+1, & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}^{-1}$$
$$\times\begin{pmatrix}1+|z_0z_0'|^2-2\bar z_0z_0' & 0\\ 0 & 1+|z_0z_0'|-2z_0\bar z_0'\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} z_0z_0'+1, & i(z_0z_0'-1) \\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1) \end{pmatrix}^{\prime -1}, \tag{4.4.5}$$

因而易得

$$(I-X_0X_0')^{-1}=\frac{1}{(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0')}\begin{pmatrix} (z_0z_0'+1)(\overline{z_0z_0'}+1) & i(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}) \\ i(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}) & (z_0z_0'-1)(\overline{z_0z_0'}-1) \end{pmatrix}. \tag{4.4.6}$$

此可以写成为 $A'A$, 此处

$$A=\frac{1}{2(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0')^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} -i(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}) & (z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}-2) \\ (z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}+2) & i(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}) \end{pmatrix}. \tag{4.4.7}$$

作变形

$$\begin{aligned} w=&\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1} \\ &\times\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\}, \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

这一变形属于 (4.4.1) 且把 z_0 变为 0.

又

$$\det A=\det D=\frac{1-|z_0z_0'|^2}{(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0')}, \tag{4.4.9}$$

微分 (4.4.8) 得

$$\begin{aligned} dw=&\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^n z^p dz^p, i\sum_{p=1}^n z^p dz^p\right)X_0D'\right\} \\ &\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}+\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\}d\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

命 $z=z_0$, 得

$$\begin{aligned} dw=&\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^n z_0^p dz^p, i\sum_{p=1}^n z_0^p dz^p\right)X_0D'\right\} \\ &\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0z_0'+1),\frac{i}{2}(z_0z_0'-1)\right)A'-z_0X_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}, \end{aligned}$$

即

$$dw=\{dz\cdot D'-(1,i)dz\cdot z_0'X_0D'\}$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(z_0 z_0' + 1), \frac{i}{2}(z_0 z_0' - 1) \right) A' - z_0 X_0' A' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1}. \qquad (4.4.10)$$

以 (4.4.4) 及 (4.4.7) 代入并化简得

$$dw = dz \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)} \right\} D' \frac{1}{i(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^{\frac{1}{2}}}, \qquad (4.4.11)$$

故由 (4.4.9) 得

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=z_0} = \det \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)} \right\} \frac{(1 - |z_0 z_0'|^2)}{(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0')} \times \frac{1}{(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^{\frac{n}{2}}},$$

即

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2_{z=z_0} = \frac{1}{(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^n}. \qquad (4.4.12)$$

在此引用了下面的等式:

$$\det \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)} \right\} = \frac{1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'}{1 - |z_0 z_0'|^2}. \qquad (4.4.13)$$

此等式的证明可由以下更普遍的结果推得之. 若 u 及 v 是二矢量, 则 $\det(I - u'\bar{v}) = 1 - \bar{v}u'$. 此乃定理 2.1.2 的特例, 故得

定理 4.4.1 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的核函数等于

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})} \frac{1}{(1 + |zz'|^2 - 2\bar{z}z')^n},$$

此处由 (2.5.7) 知

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1} n!}.$$

§4.5 Cauchy 核

今往研究由下式定义的 Cauchy 核:

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(z) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} = H(z, \bar{\xi}), \qquad (4.5.1)$$

这儿 z 在 $\mathfrak{R}$ 上变化, ξ 在 $\mathfrak{C}$ 上变化.

命 Γ_0 是 $\mathfrak{R}$ 域的以原点为不变点的稳定群. 假定 $\mathfrak{L}$ 在群 Γ_0 下成一可递集.

定理 4.5.1　级数

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}|\varphi_\nu^f(\xi)|^2 r^f \tag{4.5.2}$$

当 $\xi\in\mathfrak{L}$ 及 $0\leqslant r\leqslant r_0(<1)$ 时一致收敛, 并且这级数等于 $\dfrac{1}{V(\mathfrak{L})}(1-r)^{-n}$, 这儿 $V(\mathfrak{L})$ 代表 $\mathfrak{L}$ 的体积.

证　这是已知的事实, 不失普遍性可以假定 Γ_0 是由酉变形

$$\eta=\xi U$$

所组成的.

(4.5.2) 式可以写成为

$$\begin{aligned}\sum_{f=0}^{\infty}\xi_f\bar{\xi}_f' r^f&=\sum_{f=0}^{\infty}\xi^{[f]}H_2^{-1}\overline{\xi^{[f]'}}r^f=\sum_{f=0}^{\infty}\xi^{[f]}\left(\int_{\mathfrak{L}}\overline{\zeta^{[f]'}}\zeta^{[f]}\dot{\zeta}\right)^{-1}\overline{\xi^{[f]'}}r^f\\&=\sum_{f=0}^{\infty}\eta^{[f]}\left(\int_{\mathfrak{L}}\overline{\zeta^{[f]'}}\zeta^{[f]}\dot{\zeta}\right)^{-1}\overline{\eta^{[f]'}}r^f=\sum_{f=0}^{\infty}\eta_f\overline{\eta}_f' r^f,\end{aligned}$$

这个式子与 $\boldsymbol{\xi}(\in\mathfrak{L})$ 无关. 又经过积分得出 (4.5.2) 等于

$$\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}\sum_{f=0}^{\infty}\eta_f\overline{\eta}_f' r^f\dot{\eta}=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}\sum_{f=0}^{\infty}\binom{n+f-1}{f}r^f=\frac{1}{V(\mathfrak{L})}(1-r)^{-n}, \tag{4.5.3}$$

因而得出定理.

由 Schwarz-Буняковский 不等式推得

定理 4.5.2　当 ξ,η 在 $\mathfrak{L}$ 上时, 级数

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}\varphi_\nu^f(\xi)\overline{\varphi_\nu^f(\eta)}r^f \tag{4.5.4}$$

收敛.

定理 4.5.3　命 $\mathfrak{R}$ 是一星形圆型域, 命 $\mathfrak{R}(r)$ 是由 $\mathfrak{R}$ 依比例 $1{:}r$ 缩成的域, 这儿 $0<r<1$. 当 z 属 $\mathfrak{R}(r)$ 的闭包及 $\xi\in\mathfrak{L}$ 时, 级数 (4.5.1) 一致收敛.

证　因为一个解析函数在 $\mathfrak{L}$ 上取最大绝对值, 所以

$$\begin{aligned}\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_{\nu=1}^{N_f}\varphi_\nu^f(z)\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}\right|&=\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_{\nu}\varphi_\nu^f\left(\frac{1}{r}z\right)\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}r^f\right|\\&\leqslant\max_{\zeta\in\mathcal{L}}\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_{\nu}\varphi_\nu^f(\zeta)\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}r^f\right|,\end{aligned}$$

当 $m\to\infty, m'\to\infty$ 时, 由定理 4.5.1, 可知这式子的右方趋于 0, 故得定理.

§4.6　Cauchy 公式

以下两个定理实质上都已经证明过了. 因为它们是重要的, 故再明显地叙述如下：

定理 4.6.1　命 $\mathfrak{L}$ 表域 $\mathfrak{R}$ 的特征流形, $\mathfrak{R}$ 有定理 4.5.3 的性质. 命 $f(\xi)$ 是 $\mathfrak{L}$ 上的连续函数, 则积分

$$\varphi(z)=\frac{1}{\operatorname{vol}(\mathfrak{L})}\int_{\mathfrak{L}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi} \tag{4.6.1}$$

表一 $\mathfrak{R}$ 内的正则函数. 特别是, 如果 $f(z)$ 在 $\mathfrak{R}$ 的闭包上解析, 则有

$$f(z)=\int_{\mathfrak{L}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}.$$

这定理可由 $H(z,\bar{\xi})$ 的级数是一致收敛的推出 (定理 4.5.3).

定理 4.6.2　设 $\{\psi_\nu(\xi)\}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的一正常正交函数系且具有下列的性质：(i) $\psi_\nu(z)$ 在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上为解析; (ii) $H_1(z,\bar{\xi})=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)}$ 当 $\xi\in\mathfrak{C}$, z 在 $\mathfrak{R}$ 中的任一闭域内时一致收敛; (iii) 任一在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数 $f(z)$ 能够展为

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\psi_\nu(z);$$

并设此级数在 $\mathfrak{R}$ 的闭域中一致收敛, 则有

$$H_1(z,\bar{\xi})\equiv H(z,\bar{\xi}).$$

证　对于适合于上述条件的正交系 $\{\psi_\nu(\xi)\}$, 容易证明定理 4.6.1 成立. 换言之, 如果 $f(z)$ 为在 $\mathfrak{R}$ 中及其边界上解析的函数, 则

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}}H_1(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}. \tag{4.6.2}$$

由最大模原理易知级数

$$H(z,\overline{w})=\sum_{f,i}\frac{\varphi_f^{(i)}(z)\overline{\varphi_f^{(i)}(w)}}{\beta_f^{(i)}}.$$

当 z 在 $\mathfrak{R}$ 中任一闭域内时, w 在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上一致收敛. $H_1(z,\bar{w})$ 亦有同样的性质, 因此

$$H(z,\bar{w})=\int_{\mathfrak{C}}H_1(z,\bar{\xi})H(\boldsymbol{\xi},\bar{w})\dot{\xi}=\overline{H_1(w,\bar{z})},$$

此示

$$H(z,\bar{w})\equiv H_1(z,\bar{w}).$$

特别当 $w=\xi$ 时, 定理得证.

定理 4.6.3[①]　假定 $\mathfrak{R}$ 是一可递域, $\mathcal{L}$ 的维数等于 n, 则

$$H(z,\bar{\xi})=\frac{1}{V(\mathfrak{C})}B^{\frac{1}{2}}(z,z,U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,z,U)},$$

此处 $B(\xi,z,U)$ 是 Γ 中把 z 点变为原点的变换的函数行列式在 $\mathfrak{C}$ 上的值.

证　命 Γ 的变换把 a 点变为 O 点者为

$$w=f(z,a,U), \tag{4.6.3}$$

这变形把 $\mathfrak{C}$ 变为自己

$$\boldsymbol{\zeta}=f(\boldsymbol{\xi},a,U). \tag{4.6.4}$$

命

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}=B(\boldsymbol{\xi},a,U)\dot{\xi} \tag{4.6.5}$$

表 $\mathfrak{C}$ 上体积元素的变形关系, 已知在 $\mathfrak{C}$ 上存在正常正交系 $\{\varphi_f^{(i)}(\boldsymbol{\xi})\}$, 为简便计以 $\{\varphi_\nu(\zeta)\}$ 表之, 则

$$\int_{\mathfrak{C}}\varphi_\mu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\dot{\zeta}=\int_{\mathfrak{C}}\varphi_\mu(f(\boldsymbol{\xi}))\overline{\varphi_\nu(f(\xi))}|B(\xi,a,U)|\dot{\boldsymbol{\xi}}=\delta_{\mu\nu},$$

因此

$$\psi_\mu(\xi)=\varphi_\mu(f(\xi,a,U))B^{\frac{1}{2}}(\xi,a,U)$$

也是 $\mathfrak{C}$ 上的正常正交函数系. 现在证明 $\{\psi_\nu(\xi)\}$ 适合定理 4.5.3 所设的条件. 显然 $\psi_\nu(z)$ 在 $\mathfrak{C}$ 及其边界上解析, 并且

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}B^{\frac{1}{2}}(z,a,U)B^{\frac{1}{2}}(\xi,a,U). \tag{4.6.6}$$

命 (4.6.3) 的逆变换为

$$z=f^{-1}(w,a,U), \tag{4.6.7}$$

任一在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数 $\psi(z)$, 对应着在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数

$$\varphi(w)=\psi(f^{-1}(w,a,U))B^{-\frac{1}{2}}(z,a,U).$$

$\varphi(w)$ 能展为

$$\varphi(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w),$$

① 此定理是错误的, 见书末附注.

故

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\psi_\nu(z).$$

此示定理 4.6.2 的条件 (iii) 适合, 因此, 从 (4.6.5) 可知

$$H(z,\bar{\xi})=H(w,\bar{\zeta})B^{\frac{1}{2}}(z,a,U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,a,U)}.$$

由于 $H(0,\bar{\zeta})=\dfrac{1}{V(\mathfrak{C})}$ 及把 a 换为 z, 即得定理.

附记 上面所述的正常正交系 $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ 在 $\mathfrak{C}$ 上并不完整. 我们知道 $\mathfrak{C}$ 上的正常正交完整系是存在的 (H. Weyl[1]), 即除 $\varphi_\nu(\xi)(\nu=0,1,2,\cdots)$ 以外, 该完整系还有 $\varphi_{-\nu}(\xi)(\nu=1,2,\cdots)$. 所谓完整是对 $\mathfrak{C}$ 上的连续函数所成的线性空间而言, 即如果 $g(\xi)$ 为 $\mathfrak{C}$ 上的连续函数 $\int_{\mathfrak{C}}g(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\dot{\xi}=0(\nu=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $g(\xi)\equiv0$.

§4.7 典型域的 Cauchy 核

把定理 4.6.3 用到典型域上, 立刻得出

1° 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 中, 特征流形为 $U\overline{U}'=I$. 先假定 $m=n$, 这特征流形的维数是 n^2, 因此

$$H(Z,\overline{W})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})\det(I-Z\overline{U}')^n},\tag{4.7.1}$$

此处由定理 3.1.1 知

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n-1)!(n-2)!\cdots1!}.$$

如果 $m\neq n$, 假定 $m<n$, 我们有

$$H(Z,\overline{U})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})\det(I-Z\overline{U}'_{m,n})^n},\tag{4.7.2}$$

其中 (见 §5.5)

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})=\frac{(2\pi)^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

直接运用定理 4.6.3 并不容易得出 (4.7.2), 现在我们运用另一种方法, 从 (4.7.1) 中得出 (4.7.2) 来. 已知

$$u(Z)=\frac{1}{V(U_n)}\int_{U_n}\frac{u(U_n)\dot{U}_n}{\det(I-ZU_n)^n},\tag{4.7.3}$$

此处 U_n 过所有的 n 行列酉方阵. 命

$$Z=\begin{pmatrix}Z_1\\0\end{pmatrix},\quad Z_1=Z_1^{(m,n)}$$

及

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{aligned} u\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{V(U_n)} \int_{U_{m,n}} \int_V \frac{u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix}}{\det(I - Z_1 \overline{U}'_{m,n})^n} \dot{U}_{m,n} \dot{V} \\ &= \frac{1}{V(U_n)} \int_{U_{m,n}} \frac{\dot{U}_{m,n}}{\det(I - Z_1 \overline{U}'_{m,n})^n} \int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix} \dot{V}, \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

此处 V 过适合于

$$V\overline{U}'_n = (0, I^{(n-m)}), \quad U_{m,n}\overline{V}' = 0 \tag{4.7.5}$$

的所有的 $(n-m, n)$ 矩阵.

对固定的 $U_{m,n}$, 我们有二酉方阵 $P = P^{(m)}$ 及 $Q = Q^{(n)}$, 使

$$PU_{m,n}Q = (I^{(m)}, 0).$$

由 (4.7.5) 立得

$$(I^{(m)}, 0)\overline{Q}'V' = 0,$$

即

$$VQ = (0, W), \quad W = W^{(n-m)},$$

此处 W 是酉方阵; 故得

$$\int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix} \dot{V} = \int_W u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ (0, W)Q^{-1} \end{pmatrix} \dot{W}.$$

由 (4.7.3) 中以 $n-m$ 代 n 及 $Z = 0$, 可知

$$\int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix} \dot{V} = V(U_{n-m}) u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故由 (4.7.4) 可知

$$u\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V(U_{n-m})}{V(U_n)} \int_{U_{m,n}} \frac{u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ 0 \end{pmatrix}}{\det(I - Z_1 \overline{U}'_{m,n})^n} \dot{U}_{m,n},$$

此即以 (4.7.2) 为核的 Cauchy 公式.

2° $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的特征流形为 $U\overline{U}' = I, U$ 是对称的酉方阵.

$$H(Z, \overline{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}) \det(I - Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n+1)}}, \tag{4.7.6}$$

其中 (见 §3.5)

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})=2^{\frac{n(3n+1)}{4}}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}.$$

3° $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 上之点为 K, 这儿 K 是 (3.6.16) 所定义的方阵. 当 n 是偶数时,

$$H(Z,\overline{K})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})\det(I+Z\overline{K})^{\frac{1}{2}(n-1)}},\tag{4.7.7}$$

其中 (见 §3.7)

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{a=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(a)},\quad \nu=\frac{n}{2};$$

当 n 是奇数时,

$$H(Z,\overline{K})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})(\det(I+Z\overline{K}))^{\frac{1}{2}n}},\tag{4.7.8}$$

此处

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})=2^{-\nu}\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{a=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(a)},\quad \nu=\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

(4.7.7) 易于由定理 4.6.4 推得. 现在我们由 (4.7.7) 来推出 (4.7.8).

取 $n+1$ 代替 n. 以 (4.7.7) 为核的 Cauchy 公式

$$f(Z)=\frac{1}{V}\int_K\frac{f(K)\dot{K}}{\det(I+Z\overline{K})^{\frac{1}{2}n}},\quad Z=Z^{(n+1)},\quad K=K^{(n+1)}=-K',\tag{4.7.9}$$

此处

$$V=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n+1)}\prod_{a=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)}{\Gamma(a)},\quad \nu=\frac{1}{2}(n+1).$$

在 (4.7.4) 中取

$$Z=\begin{pmatrix}0&0\\0&Z_1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&k\\-k'&K_1\end{pmatrix},$$

此处 $Z_1=Z_1^{(n)}, k=k^{(1,n)}, K_1=K_1^{(n)}$, 如此则得

$$f\begin{pmatrix}0&0\\0&Z_1\end{pmatrix}=\frac{1}{V}\int_{K_1}\frac{\dot{K}_1}{\det(I+Z_1\overline{K}_1)^{\frac{1}{2}n}}\int_k f\begin{pmatrix}0&k\\-k'&K_1\end{pmatrix}\dot{k}.\tag{4.7.10}$$

对一固定的 K_1, 因为 K 是酉方阵, 故得

$$k\bar{k}'=1,\quad k\overline{K}_1'=0$$

及

$$k'\bar{k}+K_1\overline{K}_1'=I^{(n)}.$$

由于 $I-K_1\overline{K}_1'=k'\bar{k}$ 的秩等于 1, 且为幂等方阵, 即 $(I-K_1\overline{K}_1')^2=(k'\bar{k})^2=k'(\bar{k}k')\bar{k}=I-K_1\overline{K}_1'$, 故有一酉方阵 U 使

$$U(I-K_1\overline{K}_1')\overline{U}'=[1,0,\cdots,0],$$

即

$$UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'=[0,1,\cdots,1]=\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}}',$$

此处

$$F=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dot{+}\cdots\dot{+}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

方阵 $UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'$ 中 (1, 1) 位置的元素为 0, 故得 UK_1 的第一行皆为零, 即得

$$UK_1=\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}.$$

因此得

$$UK_1U'=\begin{pmatrix}0&0\\0&Q\end{pmatrix},$$

此处 $Q=Q^{(n-1)}=-Q'$, 且

$$Q\overline{Q}'=F\overline{F}',$$

即 $F^{-1}Q$ 是一酉方阵, 亦即 Q 是一斜对称酉方阵. 于是有一酉方阵 U_0 使

$$U_0K_1U_0'=\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}. \tag{4.7.11}$$

命 $h=k\overline{U}_0$, 则

$$h\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}=-k\overline{U}_0U_0'\overline{K}_1'U_0=0,$$

立得 $h=(e^{i\theta},0,\cdots,0)$.

研究积分 (4.7.10) 的内积分

$$I=\int_k u\begin{pmatrix}0&k\\-k'&K_1\end{pmatrix}\dot{k},$$

对一固定的 K_1(如 4.7.11 的形式), 有

$$I=\int_0^{2\pi}u\begin{pmatrix}0 & hU_0'\\ -U_0h' & \overline{U}_0'\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}\overline{U}_0\end{pmatrix}d\theta=2\pi u\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \overline{U}_0'\begin{pmatrix}0&0\\0&F\end{pmatrix}\overline{U}_0\end{pmatrix}$$

[我们应用公式 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_1e^{i\theta},\cdots,z_ne^{i\theta})d\theta=f(0,\cdots,0)$, 此处 $f(z)$ 是在一包含原点为中心的圆型域的闭包 $\bar{\mathscr{D}}$ 内解析的函数, 并且 $z\in\bar{\mathscr{D}}$].

4° $\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 的特征流形为 $1\leqslant\theta\leqslant\pi, xx'=1, x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是实的向量.

$$H(z,\theta,x)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm IV})[(x-e^{-i\theta}z)(x-e^{-i\theta}z)']^{\frac{1}{2}n}},\tag{4.7.12}$$

其中容易算得

$$V(\mathfrak{C}_{\rm IV})=\frac{2\pi^{(\frac{1}{2}n+1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}.$$

§4.8 Poisson 核

命 $\mathfrak{R}$ 表一如 §4.5 所定义的圆型域, $\mathfrak{C}$ 为其特征流形, $\mathfrak{R}^*$ 表 $\mathfrak{R}$ 的闭包. 由定理 4.6.1, 对一个在 $\mathfrak{R}^*$ 上解析的函数 $f(z)$, 常有 Cauchy 公式

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}}H(z,\bar{\xi})f(\xi)\dot{\xi}.$$

现在特别取

$$f(z)=H(z,\bar{w})g(z),$$

此处 $g(z)$ 是一个在 $\mathfrak{R}^*$ 上解析的函数, 则

$$H(z,\bar{w})g(z)=\int_{\mathfrak{C}}H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{w})g(\xi)\dot{\xi}.$$

命 $w=z$, 我们立得 Poisson 公式

$$g(z)=\int_{\mathfrak{C}}P(z,\xi)g(\xi)\dot{\xi},\tag{4.8.1}$$

此处

$$P(z,\xi)=\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})}\tag{4.8.2}$$

称为 Poisson 核.

以上仅说明, 当 $g(z)$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 上的解析函数时, (4.8.1) 成立. 我们可以扩大 $g(z)$ 的函数范围, 由于积分 (4.8.1) 的存在性, 仅需由 $g(\xi)$ 在 $\mathfrak{C}$ 上为连续即可保证. 即对一个在 $\mathfrak{C}$ 上连续的函数 $u(\xi)$, 积分

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} P(z,\xi)u(\xi)\dot{\xi} \tag{4.8.3}$$

常有意义. 以后将证明, 在某些情况下, 我们有 $\lim\limits_{z\to\xi} u(z) = u(\xi)$. 由 (4.8.3) 所定义的 $u(z)$ 即称为 $\mathfrak{R}$ 域的调和函数. 我们可以希望在 $\mathfrak{C}$ 上有一个完整正交正常系 $\{\psi_\nu(\xi)\}$, 因而 $\mathfrak{R}$ 中的调和函数集可望是 $\{\psi_\nu(z)\}$ 的线性包.

若 $\mathfrak{R}$ 适合定理 4.6.3 的假定, 则 Poisson 核取极简单的形式

$$P(z,\xi) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})}|B(\xi,z,\overline{U})|. \tag{4.8.4}$$

关于四类典型域的 Poisson 核各如下:

1) 对于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. 我们有

$$P(Z,U) = \frac{\det(I-Z\overline{Z}')^n}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})|\det(I-Z\overline{U}')|^{2n}}, \tag{4.8.5}$$

此 U 在 $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ 上. 当 $m=n$ 时, 可以另写为

$$P(Z,U) = \frac{\det(I-Z\overline{Z}')^n}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})|\det(Z-U)|^{2n}};$$

2) 对于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$.

$$P(Z,S) = \frac{\det(I-Z\overline{Z}')^{\frac{1}{2}(n+1)}}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})|\det(I-Z\overline{S})|^{n+1}}, \tag{4.8.6}$$

此处 S 在 $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ 上;

3) 对于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$. 若 n 为偶数, 则

$$P(Z,K) = \frac{\det(I+Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}(n-1)}}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})|\det(I+Z\overline{K})|^{n-1}}; \tag{4.8.7}$$

若 n 为奇数, 则

$$P(Z,K) = \frac{\det(I+Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}n}}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})|\det(I+Z\overline{K})|^{n}}, \tag{4.8.8}$$

此 K 在 $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ 上;

4) 对于 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$.

$$P(z,\xi) = \frac{(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{\frac{1}{2}n}}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}})|(z-\xi)(z-\xi)'|^{n}}, \tag{4.8.9}$$

此处 ξ 在 $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ 上.

第五章　矩阵双曲空间的调和分析

§5.1　矩阵双曲空间的正交系

命 $x=(x_1,\cdots,x_L)$ 表一 L 维空间的矢量, $x^{[f]}$ 表示由支量

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1!\cdots j_L!}}x_1^{j_1}\cdots x_L^{j_L}\quad(j_1+\cdots+j_L=f)\tag{5.1.1}$$

所成的矢量, 它的维数等于

$$\frac{1}{f!}L(L+1)\cdots(L+f-1).\tag{5.1.2}$$

当 x 经由以 P 为方阵的线性变换变为 y 时, $x^{[f]}$ 经由以 $P^{[f]}$ 为方阵的线性变换而变为 $y^{[f]}$. 矢量 $x^{[f]}$ 称为 x 的 f 级 Kronecker 幂乘积, 对应的方阵 $P^{[f]}$ 也称为 P 的 f 级 Kronecker 幂乘积.

显然 (5.1.1) 中包有所有的 f 次的单项式, 换言之, $x_1,\cdots,x_L$ 的任一 f 次齐次式一定可以表成为 (5.1.1) 的线性式. 因之, 当 $f=0,1,2,\cdots$ 时, (5.1.1) 得出 $x_1,\cdots,x_L$ 的所有的单项式.

现在我们进一步说明定理 1.5.1 在群表示论中的意义. 等式

$$\sigma((P\cdot\times Q)^{[f]})=\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}}\chi_{f_1,\cdots,f_m}(P)\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q),\quad P\in GL_m,\quad Q\in GL_n\tag{5.1.3}$$

说明了以下的事实：GL_m 与 GL_n 的直乘积的 f 级 Kronecker 幂乘积可以分解为如次的支量的直和并且每一支量仅出现一次, 其中不可分解支量是 GL_m 的以 $(f_1,\cdots,f_m)$ 为标签的表示和 GL_n 的以 $(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)$ 为标签的表示的直乘积.

更具体些, 考虑变形

$$W=PZQ,\tag{5.1.4}$$

此处 $Z=Z^{(m,n)}$, $W=W^{(m,n)}$ 是变数, $P=P^{(m)}$, $Q=Q^{(n)}$ 是系数. 将 Z 的元素排成为矢量

$$z=(z_{11},\cdots,z_{1n},z_{21},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},\cdots,z_{mn}),\tag{5.1.5}$$

W 也相当地排成为 w, 则当 Z 经 (5.1.4) 而变为 W 时, z 经一线性变形而变为 w. 这变形的方阵是 P 与 Q 的直乘积, 即 $P\cdot\times Q$, 而变 $z^{[f]}$ 为 $w^{[f]}$ 的变形的方阵是 $(P\cdot\times Q)^{[f]}$. (1.5.3) 证明了 $z^{[f]}$ 所张的空间可以分裂为如下的一些子空间, 其维数等于

$$N(f_1,\cdots,f_m)N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\quad (=q(f_1,\cdots,f_m),\text{ 定义}). \tag{5.1.6}$$

命其支量为

$$\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z),\quad i=1,2,\cdots,q(f_1,\cdots,f_m). \tag{5.1.7}$$

当 Z 由 (5.1.4) 而变为 W 时, (5.1.7) 变为 $\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(W)$ 的线性式, 其方阵是

$$A_{f_1,\cdots,f_m}(P)\cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q). \tag{5.1.8}$$

域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 在零点的稳定变换群是由

$$W=U'ZV$$

演成的, 此处 U 及 V 各过 m 行列及 n 行列的酉方阵; 对不同的 $(f_1,\cdots,f_m)$,

$$A_{f_1,\cdots,f_m}(U)\cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(V)$$

各不相似, 因此得出 (应用 Schur 引理)

$$\int\cdots\int_{I-Z\overline{Z}'>0}\psi^{(i)}_f(Z)\overline{\psi^{(i)}_g(Z)}\dot{Z}=\delta_{fg}\delta_{ij}\rho_f, \tag{5.1.9}$$

此处以 f 表 $(f_1,\cdots,f_m)$, 此 ρ_f 与 i 无关, 即

$$\{\psi^{(i)}_f(Z)\}_{i,f}$$

成一正交系. 由第四章的结果知道它是完整的, 所以今后的目的在于求出

$$\int\cdots\int_{I-Z\overline{Z}'>0}|\psi^{(i)}_f(Z)|^2\dot{Z}=\rho_f \tag{5.1.10}$$

的数值.

在算出 (5.1.10) 之前, 先说明一下 $\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)$ 的具体来源, 即先考虑如何从 Z 做出一矢量, 当 Z 经 (5.1.4) 而变化时, 这一矢量经 (5.1.8) 而变化. 在回答这一问题之前, 先将表示 $A_{f_1,\cdots,f_n}(Q)$ 说得更具体些. 当 Q 是对角线方阵

$$\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$$

时, $A_{f_1,\cdots,f_n}(\Lambda)$ 也是对角线方阵. 经行之间的换位, 对列与行同样的换位, 使换得的 $A_{f_1,\cdots,f_n}(X)$ 当 $X=\Lambda$ 时其最后几行在 $\lambda_n=0$ 时为零, 其次, 后几行在 $\lambda_{n-1}=0$ 时为零, 等等. 经如此安排之后, 不妨假定我们的表示适合于

$$\lim_{\substack{\lambda_{m+1}\to 0\\ \cdots\cdots\\ \lambda_n\to 0}} A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(\Lambda)=\begin{pmatrix} A_{f_1,\cdots,f_m}([\lambda_1,\cdots,\lambda_m]) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由此可得, 若

$$X=\begin{pmatrix} X_1^{(m)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(X)=\begin{pmatrix} A_{f_1,\cdots,f_m}(X_1^{(m)}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5.1.11}$$

假定 $n\geqslant m$. 把 $Z=Z^{(m,n)}$ 扩大成为 n 行列的方阵

$$\begin{pmatrix} Z\\ 0\end{pmatrix},$$

如此则

$$A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} P & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z\\ 0\end{pmatrix}A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q)$$
$$=A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} PZQ\\ 0\end{pmatrix}.$$

这说明了

$$A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L(Z)\\ 0\end{pmatrix}, \tag{5.1.12}$$

而

$$A_{f_1\cdots,f_m}(P)L(Z)A_{f_1,\cdots,f_m0,\cdots,0}(Q)=L(PZQ). \tag{5.1.13}$$

这 $L(Z)$ 是一个 $N(f_1,\cdots,f_m)$ 行 $N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)$ 列的矩阵, 其中的元素是 Z 的元素的 f 次齐次式. 又如果把 L 中的元素排成一矢量 $l(Z)$, 则当 Z 经 (5.1.4) 变换为 W 时, $l(Z)$ 经

$$A_{f_1,\cdots,f_m}(P)\cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q)$$

而变换为 $l(W)$. 因此不妨假定 $\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)$ 就是 $L(Z)$ 中的元素排列出来的, 因而得出

$$\sum_{i=1}^{q(f_1,\cdots,f_m)}|\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)|^2=\sigma(L(Z)\overline{L(Z)'}),$$

即得出

$$
\begin{aligned}
& q(f_1,\cdots,f_m)\rho_{f_1,\cdots,f_m} \\
= & \underset{I-Z\overline{Z}'>0}{\int\cdots\int} \sigma(L(Z)\overline{L(Z)'})\dot{Z} \\
= & \underset{I-Z\overline{Z}'>0}{\int\cdots\int} \sigma\left(A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\overline{A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}'}\right)\dot{Z} \\
= & \underset{I-Z\overline{Z}'>0}{\int\cdots\int} \sigma(A_{f_1,\cdots,f_m}(Z\overline{Z}'))\dot{Z} = \underset{I-Z\overline{Z}'>0}{\int\cdots\int} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(ZZ')\dot{Z}. \qquad (5.1.14)
\end{aligned}
$$

§5.2　类函数的积分

今往研究积分

$$
\Omega = \underset{I-Z\overline{Z}'>0}{\int\cdots\int} \chi(Z\overline{Z}')\dot{Z}, \qquad (5.2.1)
$$

此处 $\chi(W)$ 是一个类函数, 即对任一非奇异的方阵 Γ 常有

$$
\chi(W) = \chi(\Gamma W \Gamma^{-1}). \qquad (5.2.2)
$$

现在先讨论 $m=n$ 的情形. 由定理 3.4.4 可知

$$
\Omega = \frac{1}{n!}2^{-\frac{n(n+1)}{2}}\omega_n\omega_n'\int_0^1\cdots\int_0^1 \chi([\lambda_1,\cdots,\lambda_n])D^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n. \qquad (5.2.3)
$$

当 $\chi=\chi_f$ 时要算出积分 (5.2.3) 需要以下的定理.

定理 5.2.1　有如下的等于

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1},\cdots,\lambda_1^{l_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n^{l_1},\cdots,\lambda_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1^{m_1},\cdots,\lambda_1^{m_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n^{m_1},\cdots,\lambda_n^{m_n} \end{vmatrix} (\lambda_1\cdots\lambda_n)^{a-1}d\lambda_1\cdots d\lambda_n \\
= & n!\frac{D(l_1,\cdots,l_n)D(m_1,\cdots,m_n)}{\prod\limits_{j=1}^n\prod\limits_{k=1}^n(l_j+m_k+a)}. \qquad (5.2.4)
\end{aligned}
$$

证　这积分号下的函数等于

$$
(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{a-1}\sum_j \varepsilon_{j_1,\cdots,j_n}\lambda_{j_1}^{l_1}\cdots\lambda_{j_n}^{l_n}\sum_k \varepsilon_{k_1,\cdots,k_n}\lambda_{k_1}^{m_1}\cdots\lambda_{k_n}^{m_n}
$$

$$=(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{a-1}\sum_j \lambda_{j_1}^{l_1}\cdots\lambda_{j_n}^{l_n}\sum_s \varepsilon_{s_1,\cdots,s_n}\lambda_{j_1}^{m_{s_1}}\cdots\lambda_{j_n}^{m_{s_n}}.$$

求积分, 可知 (5.2.4) 的左边等式

$$\sum_j\sum_s \varepsilon_{s_1,\cdots,s_n}\int_0^1\cdots\int_0^1 \lambda_{j_1}^{l_1+m_{s_1}+a-1}\cdots\lambda_{j_n}^{l_n+m_{s_n}+a-1}d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$
$$=\sum_j\sum_s \varepsilon_{s_1,\cdots,s_n}\frac{1}{l_1+m_{s_1}+a}\cdots\frac{1}{l_n+m_{s_n}+a}$$
$$=\sum_j\left|\begin{array}{c}\frac{1}{l_1+m_1+a},\cdots,\frac{1}{l_1+m_n+a}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{l_n+m_1+a},\cdots,\frac{1}{l_n+m_n+a}\end{array}\right| = n!\left|\begin{array}{c}\frac{1}{l_1+m_1+a},\cdots,\frac{1}{l_1+m_n+a}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{l_n+m_1+a},\cdots,\frac{1}{l_n+m_n+a}\end{array}\right|.$$

由定理 1.1.3 得出本定理.

特别取 $a=1$ 及

$$m_1=n-1, m_2=n-2,\cdots,m_n=0,$$

可得

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \chi_f([\lambda_1,\cdots,\lambda_n])D^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$
$$=n!((n-1)!\cdots 2!1!)^2\prod_{j=1}^n\frac{l_j!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_n). \tag{5.2.5}$$

故当 $m=n$ 时

$$\Omega=\frac{1}{n!}2^{-\frac{n(n+1)}{2}}\omega_n\omega_n' n!((n-1)!\cdots 2!1!)^2\prod_{j=1}^n\frac{l_j!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_n)$$
$$=\pi^{n^2}\prod_{j=1}^n\frac{l_j!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_n). \tag{5.2.6}$$

§5.3　续　　前

现在讨论更一般的情形, 即 $m\leqslant n$. 命

$$X=X^{(n)}=\begin{pmatrix} Z\\ *\end{pmatrix},$$

由定理 2.2.2 可知

$$\int\cdots\int_{I-Z\overline{Z}'>0} \chi(Z\overline{Z}')\det(I-Z\overline{Z}')^{\lambda}\dot{Z} = c_1 \int\cdots\int_{I-X\overline{X}'>0} \chi(Z\overline{Z}')(\det(I-Z\overline{Z}'))^{\lambda-(n-m)}\dot{X}, \tag{5.3.1}$$

此处

$$c_1 = \frac{n!(n+1)!\cdots(2n-m-1)!}{0!1!\cdots(n-m-1)!}\pi^{-n(n-m)},$$

λ 为任意的复襄变量使右端的积分为收敛者. 把 X 表成为 TU 的形式, 此处 U 是一酉方阵, T 是一三角方阵, 其主对角线上的元素是实数, 上方是零. 把 T 写成为

$$T = \begin{pmatrix} T_1^{(m)} & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix},$$

立见 $Z=(T_1,0)U$ 及 $Z\overline{Z}'=T_1\overline{T}'_1$, 故得 (定理 3.4.3)

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{I-Z\overline{Z}'>0} \chi(Z\overline{Z}')\det(I-Z\overline{Z}')^{\lambda}\dot{Z}\\ =&c_1 2^{-\frac{n(n-1)}{2}}\omega_n \int\cdots\int_{I-T\overline{T}'>0} \chi(T_1\overline{T}'_1)(\det(I-T_1\overline{T}'_1))^{\lambda-(n-m)}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{T}.\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

注意

$$I-T\overline{T}' = \begin{pmatrix} I-T_1\overline{T}'_1 & -T_1\overline{T}'_2 \\ -T_2\overline{T}'_1 & I-T_2\overline{T}'_2-T_3\overline{T}'_3 \end{pmatrix}$$

及恒等式

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I-T_1\overline{T}'_1 & -T_1\overline{T}'_2 \\ -T_2\overline{T}'_1 & I-T_2\overline{T}'_2-T_3\overline{T}'_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \overline{P}' \\ 0 & I \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} I-T_1\overline{T}'_1 & 0 \\ 0 & I-T_2(I-\overline{T}'_1T_1)^{-1}\overline{T}'_2-T_3\overline{T}'_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

此处 $P=T_2\overline{T}'_1(I-T_1\overline{T}'_1)^{-1}$. 因为 $I-T_1\overline{T}'_1$ 是定正爱尔米方阵, 故有一方阵 Γ 使 $(I-T_1\overline{T}'_1)^{-1}=\Gamma\overline{\Gamma}'$. 命 $Q=T_2\Gamma$, 则得

$$\dot{Q} = (\det \Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\dot{T}_2 = \det(I-T_1\overline{T}'_1)^{-n+m}\dot{T}_2,$$

因之得出

$$\int\cdots\int_{I-Z\overline{Z}'>0} \chi(Z\overline{Z}')\det(I-Z\overline{Z}')^{\lambda}\dot{Z}$$

$$=c_1 2^{\frac{-n(n-1)}{2}}\omega_n \int\cdots\int_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1')\det(I-T_1\overline{T}_1')^{\lambda} t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}_1$$

$$\times \int\cdots\int_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{Q}\dot{T}_3. \tag{5.3.3}$$

由于上式不论 λ 为何值均成立, 特别令 $\lambda=0$, 则得

$$\Omega=c_1 2^{\frac{-n(n-1)}{2}}\omega_n \int\cdots\int_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1') t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}$$

$$\times \int\cdots\int_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{Q}\dot{T}_3. \tag{5.3.4}$$

今先算出第二因子的数值. 由于 $I-T_3\overline{T}_3'$ 是定正的爱尔米方阵, 所以有一方阵 Γ 使 $I-T_3\overline{T}_3'=\Gamma\overline{\Gamma}'$. 命 $Q=\Gamma R$, 则 $\dot{Q}=(\det\Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\dot{R}=(\det(I-T_3\overline{T}_3'))^{n-m}\dot{R}$, 因此得到

$$\int\cdots\int_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{Q}\dot{T}_3$$

$$=\int\cdots\int_{I-R\overline{R}'>0}\dot{R}\int\cdots\int_{I-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n \det(I-T_3\overline{T}_3')^{n-m}\dot{T}_3$$

$$=V_{m,n-m}\int\cdots\int_{I-Z_3\overline{Z}_3'>0}\det(I-Z_3\overline{Z}_3')^{n-m}\dot{Z}_3/\omega_{n-m}2^{\frac{-(n-m)(n-m-1)}{2}} \tag{5.3.5}$$

(用定理 3.4.3).

又

$$\int\cdots\int_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1') t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}_1$$

$$=\frac{2^{\frac{m(n-1)}{2}}}{\omega_m}\int\cdots\int_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0}\chi(Z_1\overline{Z}_1')\det(Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1, \tag{5.3.6}$$

故由 (5.3.4) 可知

$$\Omega=C\int\cdots\int_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0}\chi(Z_1\overline{Z}_1')\det(Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1, \tag{5.3.7}$$

此处 C 为仅与 n 及 m 有关的常数. 今往算出于下:

在 (5.3.7) 中取 $\chi(Z_1\overline{Z}_1')=1$, 则得 [见 (5.3.9)]

$$\begin{aligned}V_{m,n}=&C\int_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0}\cdots\int\det(Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1\\=&C\pi^{m^2}\frac{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}{n!(n+1)!\cdots(n+m-1)!},\end{aligned}$$

此处 $V_{m,n}=V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})$. 所以 (定理 2.2.1)

$$\begin{aligned}C=&V_{m,n}\pi^{-m^2}\frac{n!(n+1)!\cdots(n+m-1)!}{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}\\=&\pi^{m(n-m)}\frac{1!2!\cdots(m-1)!1!2!\cdots(n-1)!}{1!2!\cdots\cdots(m+n-1)!}\\&\times\frac{n!(n+1)!\cdots(n+m-1)!}{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}\\=&\pi^{m(n-m)}\frac{1!2!\cdots(m-1)!}{(n-m)!(n-m+1)!\cdots(n-1)!}=V_{m,n-m}.\end{aligned}$$

于是

$$\Omega=\frac{1}{m!}V_{m,n-m}\int_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0}\cdots\int\chi(Z_1\overline{Z}_1')\det(Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1.\tag{5.3.8}$$

又当 $\chi(X)=\chi_{f_1,\cdots,f_m}(X)$ 时, 由于

$$\chi_f(X)(\det X)^{n-m}=\chi_{f_1+n-m,\cdots,f_m+n-m}(X)$$

及 (5.2.6) 可知

$$\begin{aligned}&\int_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0}\cdots\int\chi_f(Z_1\overline{Z}_1')\det(Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1\\=&2^{-m}\omega_m\omega_m'((m-1)!\cdots2!1!)^2\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m)\\=&\pi^{m^2}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m),\end{aligned}\tag{5.3.9}$$

故

$$\Omega=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m).\tag{5.3.10}$$

§5.4 核 函 数

至此我们已经完全定出 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 的一个正交系, 即

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_{f_1,\cdots,f_m}}}\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z), i=1,2,\cdots,N(f_1,\cdots,f_m)N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0).$$

由定理 4.1.1 已知它是完整的, 今再由之而定出核函数.

在定理 1.3.1 中取 $\rho=m+1$, 则当 $|\lambda_i|<1$ 时有等式

$$\left(\prod_{i=1}^m(1-\lambda_i)\right)^{-m-n}=c_{m-1}\sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\chi_{f_1,\cdots,f_m}([\lambda_1,\cdots,\lambda_m]),\quad(5.4.1)$$

此处 $a_l=(m+l)!/(m!l!)$ 及 $c_{m-1}^{-1}=a_{n-m}\cdots a_{n-1}$. 由于 $\chi(X)$ 及 $\det(I-X)$ 都是类函数, 因之得出

$$(\det(I-W\overline{Z}'))^{-m-n}=c_{m-1}\sum_{l_1>\cdots l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\chi_{f_1,\cdots,f_m}(W\overline{Z}').\quad(5.4.2)$$

此式当 $W\overline{Z}'$ 的特征根的绝对值皆小于 1 时真实.

若 W 与 Z 都在 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 内, 即

$$I-W\overline{W}'>0,\quad I-\overline{Z}'Z>0,$$

则对任一矢量 $z(\neq 0)$ 常有

$$zW\overline{Z}'Z\overline{W}'\overline{z}'<z\overline{z}'.\quad(5.4.3)$$

若 λ 是 $W\overline{Z}'$ 的特征根, 即如有一矢量 z 使

$$zW\overline{Z}'=\lambda z,$$

则

$$zW\overline{Z}'Z\overline{W}'\overline{z}'=|\lambda|^2z\overline{z}'.\quad(5.4.4)$$

比较 (5.4.3) 及 (5.4.4) 可知 $|\lambda|<1$, 故 (5.4.2) 当 W 及 Z 都在 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 中时成立.

又已知

$$K(Z,\overline{W})=\sum_f\sum_i\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)\overline{\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(W)}/\rho_{f_1,\cdots,f_m}$$

$$=\sum_f \chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\overline{W}')/\rho_{f_1,\cdots,f_m}, \tag{5.4.5}$$

由 (5.1.14) 及 (5.3.10) 可知

$$q(f_1,\cdots,f_m)\rho_{f_1,\cdots,f_m}=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\sum_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m). \tag{5.4.6}$$

代入 (5.4.5),

$$\begin{aligned}K(Z,\overline{W})=&\frac{1}{\pi^{m^2}V_{m,n-m}}\sum_f\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n)!}{(l_j+n-m)!}\\&\times N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\overline{W}').\end{aligned}$$

由 (5.4.2) 可知

$$\begin{aligned}K(Z,\overline{W})=&\frac{1}{\pi^{m^2}V_{m,n-m}}a_{n-m}\cdots a_{n-1}(m!)^m(\det(I-Z\overline{W}'))^{-m-n}\\=&c(\det(I-Z\overline{W}'))^{-m-n},\end{aligned}$$

此处

$$c^{-1}=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m+n-i)!}=\pi^{mn}\frac{1!\cdots(m-1)!}{n!\cdots(n+m-1)!}=V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}).$$

这又证明了

$$K(Z,\overline{W})=\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})}(\det(I-Z\overline{W}'))^{-m-n}.$$

§5.5　特征流形上的调和分析

仍假定 $n\geqslant m$. 今以 $U=U^{(m,n)}$ 表一适合于

$$U\overline{U}'=I^{(m)} \tag{5.5.1}$$

的矩阵, 这流形以 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 表之, 今先证明, $\mathfrak{U}_{m,n}$ 可看作为 $\mathfrak{U}_n$ 对其分群 $\mathfrak{U}_{n-m}$ 的傍系, 而 $\mathfrak{U}_{m-n}$ 是由

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ 0 & U_{n-m}\end{pmatrix}$$

定义的. 具体些, 若

$$U_n=\begin{pmatrix}U_{m,n}\\ P\end{pmatrix},\quad V_n=\begin{pmatrix}U_{m,n}\\ Q\end{pmatrix},$$

则

$$U_n V_n^{-1} = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U_{n-m} \end{pmatrix},$$

故得：若 $f(U)$ 在 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上定义，则

$$\int_{\mathfrak{U}_n}\cdots\int f(U)\dot{U}_n = \int_{\mathfrak{U}_{m,n}}\cdots\int f(U)\dot{U}\int_{\mathfrak{U}_{n-m}}\cdots\int \dot{U}_{n-m}.$$

我们定义

$$\int_{\mathfrak{U}_{m,n}}\cdots\int f(U)\dot{U} = \frac{1}{\omega_{n-m}}\int_{\mathfrak{U}_n}\cdots\int f(U)\dot{U}_n, \tag{5.5.2}$$

由此可见，$\mathfrak{U}_{m,n}$ 的体积等于

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

又

$$P_f(U) = (\psi_f^{(1)}(U), \cdots, \psi_f^{(q(f))}(U)),$$
$$q(f) = N(f_1, \cdots, f_m)N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0),$$

已知

$$P_f(V^{(m)}UW^{(n)}) = P_f(U)(A_{f_1,\cdots,f_m}(V)\cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(W)). \tag{5.5.3}$$

作

$$\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int P_f(U)\overline{P_g(U)}'\dot{U} = R = R^{(q(f),q(g))},$$

则得

$$R = (A_{f_1,\cdots,f_m}(V)\cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(W))\overline{R(A_{g_1,\cdots,g_m}(V)\cdot\times A_{g_1,\cdots,g_m,0,\cdots,0}(W))}'.$$

故若 $f\neq g$，则 $R=0$；若 $f=g$，则 R 是一无向量，所以

$$\{\psi_f^{(i)}(U)\}$$

成一正交系. 今往算出正常化常数

$$\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int |\psi_f^{(i)}(U)|^2\dot{U} = \beta_f,$$

此数仅与 f 有关. 对 i 求和, 得

$$q(f)\beta_f = \int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int \sum_i |\psi_f^{(i)}(U)|^2\dot{U}$$
$$= \int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int \chi_f(U\overline{U}')\dot{U} = N(f_1,\cdots,f_m)\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int \dot{U},$$

即得

$$\beta_f = c/N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0),$$

此处

$$c = \frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

再在定理 1.3.1 中取 $\rho=1$, 则得

$$\left(\prod_{i=1}^m(1-x_i)\right)^{-n} = \sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\chi_{f_1,\cdots,f_m}([x_1,\cdots,x_n]).$$

若 Z 在 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 上及 U 在 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上, 则 $Z\overline{U}'$ 的特征根的绝对值都小于 1, 故得

$$(\det(I-Z\overline{U}'))^{-n} = \sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\overline{U}')$$
$$= c\sum_f \frac{1}{\beta_f}\sum_i \psi_f^{(i)}(Z)\overline{\psi_f^{(i)}(U)}; \qquad (5.5.4)$$

并可证明: 若 $0<r<1$, 则当 Z 在 $rI-Z\overline{Z}'>0$ 中时, 级数 (5.5.4) 一致收敛.

若 $f(U)$ 是 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上的可积分函数, 则级数乘以 $f(U)$ 并逐项积分可得

$$\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int \det(I-Z\overline{U}')^{-n}f(U)\dot{U} = \sum_{f,i} a_{f,i}\psi_f^{(i)}(Z)\Big/\sqrt{\beta_f},$$

此处

$$a_{f,i} = c\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int \frac{f(U)\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}}\dot{U}.$$

即得

定理 5.5.1　若 $f(U)$ 是一个可积函数, 并且它对正交完整系

$$\{\psi_f^{(i)}(U)/\sqrt{\beta_f}\}$$

的 Fourier 系数是

$$a_{f,i} = \frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-1)!\cdots(n-m)!}\int\cdots\int_{U\overline{U}'=I} f(U)\frac{\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}}\dot{U},$$

则积分

$$\int\cdots\int_{U\overline{U}'=I} \det(I-Z\overline{U}')^{-n} f(U)\dot{U}$$

在域 $I - Z\overline{Z}' > 0$ 内表一解析函数, 并且它在此域内有解析表示法

$$\sum_{f,i} a_{f,i}\psi_f^{(i)}(Z)/\sqrt{\beta_f}.$$

§5.6 Cauchy 型积分

现在我们只研究 $m = n$ 的情形, 其他的情形并无特殊困难. 今往研究在何种情形下积分

$$\int\cdots\int_{U} f(U)\det(I-Z\overline{U}')^{-n}\dot{U} \tag{5.6.1}$$

存在. 今假定 $f(U)$ 是一已给的连续函数.

定理 5.6.1 若 $Z\overline{Z}'$ 的特征根都大于 1 或都小于 1, 则对任一酉方阵 U,

$$\det(I - Z\overline{U}') \neq 0.$$

不然, 常有 U 方阵使

$$\det(I - Z\overline{U}') = 0.$$

证 假定 $\det(I - Z\overline{U}') = 0$, 则有一矢量 z 使

$$z(I - Z\overline{U}') = 0,$$

即

$$z = zZ\overline{U}'.$$

因此立得

$$z\overline{z}' = zZ\overline{Z}'\overline{z}'.$$

由此证明定理的前一部分.

在证明定理的后一部分时, 我们可以假定 $Z=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n](\lambda_\nu\geqslant 0)$ 而不失其普遍性. 由

$$\det\left(I^{(2)}-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda_1\cos\theta & -\lambda_1\sin\theta\\ \lambda_2\sin\theta & 1-\lambda_2\cos\theta\end{vmatrix}$$
$$=1-(\lambda_1+\lambda_2)\cos\theta+\lambda_1\lambda_2=0$$

可推得

$$\cos\theta=\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{5.6.2}$$

若 $\lambda_1\geqslant 1\geqslant\lambda_2$, 则 $1+\lambda_1\lambda_2\leqslant\lambda_1+\lambda_2$, 故可选一 θ 使 (5.6.2) 成立. 因此证明了定理的第二部分.

由此推出

定理 5.6.2　当 $I-Z\overline{Z}'>0$ 或 $I-Z\overline{Z}'<0$ 时, 积分 (5.6.1) 有意义.

今再进一步说明此定理.

先扩大 $A_{f_1,\cdots,f_n}(U)$ 的定义, 今后将不限于 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$ 的情形. 我们简写作

$$A_f(U)=A_{f_1,\cdots,f_n}(U),$$

且以 "$f\geqslant 0$" 表示 "$f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$". 已知对 $f\geqslant 0$ 及 $l\geqslant 0$ 常有

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U)(\det U)^l=A_{f_1+l,\cdots,f_n+l}(U).$$

对任意的 $f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n$, 我们有一正整数 l 使 $f_n+l\geqslant 0$, 如此我们定义

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U)=(\det U)^{-l}A_{f_1+l,\cdots,f_n+l}(U). \tag{5.6.3}$$

此定义与 l 的选择无关.

易证

$$\overline{A_{f_1,\cdots,f_n}(U)'}=A_{-f_n,-f_{n-1},\cdots,-f_1}(U). \tag{5.6.4}$$

若 $f(U)$ 的 Fourier 展开式等于

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(U)\Big/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}},$$

则当 Z 适合于 $I-Z\overline{Z}'>0$ 时常有

$$f(Z)=\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z)\Big/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}}. \tag{5.6.5}$$

又当 Z 适合于 $I - Z\overline{Z}' < 0$ 时, 则

$$\int_U \cdots \int f(U)\det(I - Z\overline{U}')^{-n}\dot{U}$$
$$=(-\det Z)^{-n}\int_U \cdots \int f(U)\det(U)^n \det(I - UZ^{-1})^{-n}\dot{U}.$$

我们有

$$(\det U)^n \det(I - UZ^{-1})^{-n}$$
$$=C(\det U)^n \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i \psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(U)\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})/\beta_{f_1,\cdots,f_n}$$
$$=C\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i \psi^{(i)}_{f_1+n,\cdots,f_n+n}(U)\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})/\beta_{f_1,\cdots,f_n},$$

乘以 $f(U)$ 且逐项求积分可知

$$\int_U \cdots \int f(U)\det(I - Z\overline{U}')^{-n}\dot{U}$$
$$=(-\det Z)^n \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i b^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}},$$

此处

$$b^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n} = C\int_U \cdots \int f(U)\psi^{(i)}_{f_1+n,\cdots,f_n+n}(U)\dot{U}/\beta^{1/2}_{f_1,\cdots,f_n}$$
$$= C\int_U \cdots \int f(U)\psi^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}(\overline{U}')\dot{U} = a^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}.$$

总之, 在 $I - Z\overline{Z}' < 0$ 时, 我们得出 Z^{-1} 的解析函数

$$\int_U \cdots \int f(U)\det(I - Z\overline{U}')^{-n}\dot{U}$$
$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}\psi^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}(Z^{-1})/\beta^{1/2}_{f_1,\cdots,f_n}. \tag{5.6.6}$$

§5.7 微分算子 (华罗庚, 陆启铿 [2])

我们现在引进微分算子

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z_{11}}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial}{\partial z_{m1}}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z_{mn}} \end{pmatrix}. \tag{5.7.1}$$

命 Γ_{I} 表空间 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的运动群. 已知 (华罗庚 [1]) Γ_{I} 是由以下的变换

$$\begin{aligned} W =&(AZ+B)(CZ+D)^{-1} \\ =&(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}'+\overline{C}') \end{aligned} \tag{5.7.2}$$

组成的, 这儿矩阵

$$A=A^{(m)},\quad B=B^{(m,n)},\quad C=C^{(n,m)},\quad D=D^{(n)}$$

适合

$$A\overline{A}'-B\overline{B}'=I,\quad A\overline{C}'=B\overline{D}',\quad C\overline{C}'-D\overline{D}'=-I. \tag{5.7.3}$$

这也等价于

$$\overline{A}'A-\overline{C}'C=I,\quad \overline{A}'B=\overline{C}'D,\quad \overline{B}'B-\overline{D}'D=-I. \tag{5.7.4}$$

微分 (5.7.2), 由 (5.7.4) 可得

$$\begin{aligned} dW &= [A-(AZ+B)(CZ+D)^{-1}C]dZ(CZ+D)^{-1} \\ &= [A-(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}'+\overline{C}')C]dZ(CZ+D)^{-1} \\ &= (Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}dZ(CZ+D)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

逆变关系有

$$\partial'_W=(CZ+D)\partial'_Z(Z\overline{B}'+\overline{A}'). \tag{5.7.6}$$

命

$$W_1=(AZ_1+B)(CZ_1+D)^{-1}, \tag{5.7.7}$$

则有

$$\begin{aligned} I-\overline{W}'_1W &= I-(\overline{Z}'_1\overline{C}'+\overline{D}')^{-1}(\overline{Z}'_1\overline{A}'+\overline{B}')(AZ+B)(CZ+D)^{-1} \\ &= (\overline{Z}'_1\overline{C}'+\overline{D}')^{-1}(I-\overline{Z}'_1Z)(CZ+D)^{-1}; \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

同法有

$$I-W\overline{W}'_1=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}(I-Z\overline{Z}'_1)(B\overline{Z}'_1+A)^{-1}. \tag{5.7.9}$$

命

$$\Delta_Z=(I-Z\overline{Z}')\overline{\partial}_Z(I-\overline{Z}'Z)\partial'_Z,$$

则得

$$\Delta_W=(Z\overline{B}'+\overline{A}')^{-1}\Delta_Z(Z\overline{B}'+\overline{A}'). \tag{5.7.10}$$

算子

$$\mathrm{tr}\Delta_Z$$

称为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的 Laplace 算子或调和算子, 这儿 $\mathrm{tr}A$ 表方阵 A 的迹. 注意 Δ_Z 中 $\overline{\partial}_Z(I-\overline{Z}'Z)$ 是两个方阵 $\overline{\partial}_Z,(I-\overline{Z}'Z)$ 的形式乘法, 并不在方阵 $(I-\overline{Z}'Z)$ 上施微分运算. 更确切些, 算子 $\mathrm{tr}\Delta_Z$ 的详细写法是

$$\mathrm{tr}\Delta_Z=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\beta,\gamma=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\sum_{\alpha=1}^{n}z_{i\alpha}\bar{z}_{j\alpha}\right)\left(\delta_{\beta\gamma}-\sum_{k=1}^{m}\bar{z}_{k\beta}z_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{i\gamma}\partial\bar{z}_{j\beta}}. \tag{5.7.11}$$

这在 (5.7.2) 下是不变的.

定义 1　$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 中适合于 $\mathrm{tr}\Delta_Z u=0$ 的函数 $u(Z)$ 称为调和函数.

§5.8　$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 边界上 Laplace 算子的意义

命 $\overline{\mathfrak{R}}$ 表域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的闭包, $\mathfrak{L}^{(r)}$ 表 $\overline{\mathfrak{R}}$ 上的点使 $I-Z\overline{Z}'$ 的秩等于 r 者. 显然 $\overline{\mathfrak{R}}$ 是无公共元素的集合

$$\mathfrak{L}^{(0)}=\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}\,,\quad \mathfrak{L}^{(1)},\cdots,\mathfrak{L}^{(m-1)},\quad \mathfrak{L}^{(m)}=\mathfrak{R}$$

的和集.

定义 2　对任意两个给定的酉方阵 $U=U^{(m)},V^{(n)}$, 形如

$$U\begin{pmatrix} I^{(m-r,m-r)} & 0\\ 0 & Z_0^{(r,n-m+r)}\end{pmatrix}V,\quad I-Z_0\overline{Z}_0'>0 \tag{5.8.1}$$

的点集称为一个 r 盖 (r-covering).

显然, $\mathfrak{L}^{(r)}$ 上的任一点, 一定在一个 r 盖中, 但任意两个 r 盖可能有公共点.

今往解释 Laplace 算子在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 边界上的意义. 命 Z 是 $\mathfrak{L}^{(r)}$ 上的一点, 属于 (5.8.1) 所定义的 r 盖. 因为 (5.7.11) 在 $W=UZV$ 下不变, 因此, 不失普遍性, 我们只要研究形如

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & Z_0^{(r,n-m+r)}\end{pmatrix},\quad I-Z_0\overline{Z}_0'>0 \tag{5.8.2}$$

的 r 盖即足. 假定 $u(Z)$ 在 $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}-\mathfrak{L}$ 上定义, 对一点 Z_0 的任一 r 盖 $(r>0),u(Z)$ 有二阶连续偏微商. 对 (5.8.2) 的各点, $\mathrm{tr}\Delta_Z u(Z)$ 简化成为

$$\mathrm{tr}\Delta_Z=\mathrm{tr}((I-Z_0\overline{Z}_0')\overline{\partial}_{Z_0}(I-\overline{Z}_0'Z_0)\partial_{Z_0}'). \tag{5.8.3}$$

我们假定在 (5.8.2) 上,

$$u\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}$$

适合微分方程

$$\mathrm{tr}((I-Z_0\overline{Z}_0')\overline{\partial}_{Z_0}(I-\overline{Z}_0'Z_0)\partial_{Z_0}')u\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}=0.$$

定义 3　一个实函数 $u(Z)$, 如有以上所描述的微分性质, 并且在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 上适合

$$(\mathrm{tr}\Delta_Z)u(Z)=0, \tag{5.8.4}$$

则称为 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 上的调和函数.

显然, 这个 "调和" 性质是经群 Γ_{I} 而不变的. 所有的调和函数成一线性集合.

定义 4　在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 上调和且在 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 连续的函数称为一个 ξ 类.

定理 5.8.1　对任一 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的连续函数 $\varphi(U)$, Poisson 积分

$$u(Z)=\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,U)\dot{U} \tag{5.8.5}$$

是一个 ξ 类的连续函数.

为了证明这个定理, 我们需要以下的定理.

定理 5.8.2　当 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的一点 U 经 (5.7.2) 变为 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的一点 V 时, 我们有

$$P_{\mathrm{I}}(W,V)=P_{\mathrm{I}}(Z,U)|\det(B\overline{U}'+A)|^{2n}. \tag{5.8.6}$$

由 (5.7.8) 及 (5.7.9) 可推出

$$\begin{aligned}&(I-W\overline{V}')^{-1}(I-W\overline{W}')(I-V\overline{W}')^{-1}\\ =&(B\overline{U}'+A)(I-Z\overline{U}')^{-1}(I-Z\overline{Z}')(I-U\overline{Z}')^{-1}(U\overline{B}'+\overline{A}'),\end{aligned} \tag{5.8.7}$$

于是得

$$\frac{\det(I-W\overline{W}')^n}{|\det(I-W\overline{V}')|^{2n}}=\frac{\det(I-Z\overline{Z}')^n}{|\det(I-Z\overline{U}')|^{2n}}|\det(B\overline{U}'+A)|^{2n}.$$

故得定理 5.8.2.

定理 5.8.3　$P_{\mathrm{I}}(Z,U)$ 是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 上的调和函数, 但并不属于 ξ 类.

证　先证在 $Z=0$ 处

$$(\mathrm{tr}\Delta_Z)P_{\mathrm{I}}(Z,U)=0.$$

命

$$Z=(z_{j\alpha}),\quad U=(u_{j\alpha}),\quad 1\leqslant j\leqslant m,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n,$$

则有

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{tr}\Delta_Z P_{\mathrm{I}}(Z,U))_{Z=0} = (\mathrm{tr}\overline{\partial}_Z\partial'_Z P_{\mathrm{I}}(Z,U))_{Z=0}\\
=&\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}P_{\mathrm{I}}(Z,U)\bigg|_{Z=0}\\
=&\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}\det(I-Z\overline{Z}')^n\det(I-Z\overline{U}')^{-n}\det(I-U\overline{Z}')^{-n}\bigg|_{Z=0}\\
=&\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\bigg[\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}\det(I-Z\overline{Z}')^n\\
&+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\det(I-Z\overline{U}')^{-n}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j\alpha}}\det(I-U\overline{Z}')^{-n}\bigg]_{Z=0}\\
=&\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\bigg\{\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}\bigg(1-n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|z_{k\beta}|^2\bigg)\\
&+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\bigg(1+n\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}z_{k\beta}\bar{u}_{k\beta}\bigg)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{j\alpha}}\bigg(1+n\sum_{k=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\bar{z}_{k\beta}u_{k\beta}\bigg)\bigg\}_{Z=0}=0.
\end{aligned}$$

由 (5.7.1) 的可递性及定理 5.8.2, 我们可知, 这结果对 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的任一内点都对. 在积分号下求微分, 则对 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 内任一点 Z, 由 (5.8.5) 所定义的函数常适合

$$\mathrm{tr}\Delta_Z u(Z)=0.$$

定理 5.8.1 的证明仍不完全, 因为我们对 (5.8.5) 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的边界上的情况还不了解.

§5.9 Poisson 积分在边界上的性质

为了使定理 5.8.1 的证明完备, 我们证明以下两个定理. 在证明了这两个定理之后, 定理 5.8.1 的证明便自然完备了.

定理 5.9.1 对 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的任一 V, 有

$$\lim_{Z\to V}u(Z)=\varphi(V). \tag{5.9.1}$$

定理 5.9.2 命 $m>1$ 及

$$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&Z_0\end{pmatrix},\quad Z_0=Z_0^{(m-1,n-1)},\quad I^{(m-1)}-Z_0\overline{Z}_0'>0, \tag{5.9.2}$$

则

$$\lim_{Z\to Q}\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,U)\dot{U}=\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}^{(n-1,m-1)}}\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}P_{\mathrm{I}}^{(m-1,n-1)}(Z_0,U_0)\dot{U}_0, \tag{5.9.3}$$

这儿 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{(n-1,m-1)}$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}^{(n-1,m-1)}$ 都表示 $(n-1)\times(m-1)$ 矩阵相应的域及特征流形, 而 $P_{\mathrm{I}}^{(m-1,n-1)}(Z_0,U_0)$ 表示相关的 Poisson 核.

由定理 5.9.2 可以推出, 为了证明定理 5.9.1, 只要证明其 $m=1$ 的特例. 换符号.

定理 5.9.1′　命 $v=(v_1,\cdots,v_n)$, 对 $u\bar{u}'=1$ 上的一个连续函数 $\varphi(u)$, 任一适合于 $v\bar{v}'=1$ 的 v 常有

$$\varphi(v)=\lim_{z\to v}\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\frac{(1-z\bar{z}')^n}{|1-z\bar{u}'|^{2n}}\dot{u}. \tag{5.9.4}$$

证　任一矢量 v 都可以用酉变换把它变成为 $(1,0,\cdots,0)=e$. 不失普遍性, 求证: 命 $z=\rho e$, $0<\rho<1$, 则

$$\varphi(e)=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{u}. \tag{5.9.5}$$

由于 (5.9.5) 当 $\varphi(u)=1$ 时正确, 即

$$1=\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{u}, \tag{5.9.6}$$

我们只需证明: 对任一 $\varepsilon>0$, 我们可取 ρ, 使其充分接近于 1 且

$$\left|\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u)-\varphi(e))\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{u}\right|<\varepsilon. \tag{5.9.7}$$

用参数表达式

$$\begin{aligned}
&u_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&u_2=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3+i\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_n=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2}\cos\theta_{2n-1}+i\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{2n-2}\sin\theta_{2n-1},\\
&\quad 0\leqslant\theta_j<\pi,\quad j=1,2,\cdots,2n-2,\quad 0\leqslant\theta_{2n-1}<2\pi.
\end{aligned}$$

给了 $\varepsilon>0$, 我们可以选取 δ, 使 $0\leqslant\theta_1\leqslant\delta$ 时,

$$|\varphi(u)-\varphi(e)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\left|\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\0\leqslant\theta_1\leqslant\delta}}(\varphi(u)-\varphi(e))\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho u_1|^{2n}}\dot{u}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

又, 对一固定的 δ, 当 $\pi>\theta_1>\delta$ 时,

$$|1-\rho u_1|^{2n}=((1-\rho\cos\theta_1)^2+\rho^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2)^n$$

$$\geqslant (1-\rho\cos\theta_1)^{2n} \geqslant (1-\cos\delta)^{2n} = 2^{2n}\sin^{2n}\frac{\delta}{2}.$$

取 ρ 充分接近 1, 使

$$0 < (1-\rho)^n < \frac{2^{n-1}\sin^{4n}\dfrac{\delta}{2}}{M}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

这儿 M 表 $|\varphi(u)|$ 在 $u\bar{u}'=1$ 的上界, 则

$$\frac{1}{V(\mathfrak{L}_1)}\left|\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ \delta\leqslant\theta_1<\pi}}(\varphi(u)-\varphi(e))\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho u_1|^{2n}}\dot{u}\right|$$
$$\leqslant\frac{2M\cdot 2^n}{V(\mathfrak{L}_{\rm I})}\frac{(1-\rho)^n}{2^{2n}\sin^{4n}\dfrac{\delta}{2}}\int_{u\bar{u}'=1}\dot{u}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

公式 (5.9.7) 于是证毕.

由此可以推出, 当 z 依直径趋于 v 时, (5.9.4) 成立. 由于 $u(z)\to u(v)$ 的一致性, 故当 z 依任一途径 (不切于球的途径) 趋于 v 时, (5.9.4) 仍正确.

在证明定理 5.9.2 之前, 我们先指出以下的事实: 由 Poisson 积分 (5.8.5) 显然可以推出 Gauss 中值公式

$$u(0)=\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\rm I})}\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}\varphi(U)\dot{U}. \tag{5.9.8}$$

更有趣的是用变形 (5.7.2), 从 (5.9.8) 可以推出 (5.9.5) 来.

定理 5.9.2 的证明. 由以上提出的事实, 只要证明

$$\lim_{Z\to Q}\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}\varphi(U)P_{\rm I}(Z,U)\dot{U}=\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}^{(n-1,m-1)}}\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}\dot{U}_0 \tag{5.9.9}$$

即足, 这儿

$$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

先考虑特殊途径

$$Z=\begin{pmatrix}\rho&0\\0&0\end{pmatrix},\quad 0<\rho<1,\quad \rho\to 1,$$

写成

$$U=\begin{pmatrix}u\\U_1\end{pmatrix},\quad u=(u_1,\cdots,u_n),$$

则

$$\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z,U)\dot{U} = \frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} \varphi(U)\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{U}$$
$$= \frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}\int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\tau(u)\dot{u}, \tag{5.9.10}$$

这儿

$$\tau(u) = \int_{U_1} \varphi(U)\dot{U}_1.$$

由于 $\tau(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上连续及

$$V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}) = V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}^{(m-1,n-1)})\int_{u\bar{u}'=1} \dot{u},$$

由定理 5.9.1′ 可知

$$\int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z,U)\dot{U} = \frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}^{(m-1,n-1)})}\tau(e), \tag{5.9.11}$$

这儿 $e=(1,0,\cdots,0)$. 由于 $U\overline{U}'=I$ 及 $u=e$, 则

$$U_1 = (0, U_0), \quad U_0 = U_0^{(m-1,n-1)}.$$

因而得出

$$\tau(e) = \int_{U_0} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_0 \end{pmatrix}\dot{U}_0.$$

因此, 当 Z 依一特殊途径趋于 Q 时, (5.9.3) 成立. 再用一致连续性可以得出, 依 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的任一途径这结论也对.

定理 5.9.1 全部证明.

附记　重用 Poisson 核是 Jacobian 这一事实, 本定理的证明可以简化, 其结果将另行发表 (华罗庚 [10]).

§5.10　$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 域的 Dirichlet 问题的解答

在 §5.8 及 §5.9 中, 我们已经得到以下的结论：在 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上给了任意连续函数 $\varphi(U)$, Poisson 积分 (5.8.5) 给出一个 ξ 类的调和函数, 而且以 $\varphi(U)$ 作为其边界值.

今往证明其唯一性, 先证极值原理：

定理 5.10.1　ξ 类中任一调和函数必在 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上取最大值或最小值.

仅需证明任一调和函数在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的边界上取极值即足, 因为在 $\mathfrak{L}^{(r)}(0<r<m)$ 上一点的问题与在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(r,n-m+r)$ 上的问题实质上是等价的.

我们用以下的定理来证明这一点.

定理 5.10.2 假定 $\rho(Z)$ 是实函数, 而 $v(Z)$ 是微分方程

$$\mathrm{tr}\Delta_Z v(Z)=\rho(Z) \tag{5.10.1}$$

的一个解答. 如果 $\rho(Z)>0$, 则 $v(Z)$ 不能在 $\mathfrak{R}_\mathrm{I}$ 的内点取最大值; 如果 $\rho(Z)<0$, 则不能在 $\mathfrak{R}_\mathrm{I}$ 的内点取最小值.

证 第二部分的结论可由第一部分把 $\rho(Z)$ 换为 $-\rho(Z)$ 而得出, 因而不妨假定 $\rho(Z)>0$.

假定 $v(Z)$ 在一内点 Z_0 取最大值, 换变数, 我们可以假定 $Z_0=U$. (5.10.1) 给出

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial\bar{z}_{j\alpha}}v(Z)\right)_{Z=0}=\rho(0)>0. \tag{5.10.2}$$

由于 $v(Z)$ 在 $Z=0$ 取最大值, 所以

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial\bar{z}_{j\alpha}}v(Z)\right|_{Z=0}\leqslant 0,$$

这与 (5.10.2) 相矛盾.

定理 5.10.1 的证明. 命 M 为 $u(Z)$ 在 $\mathfrak{R}_\mathrm{I}$ 的边界 $\mathfrak{L}_\mathrm{I}$ 上的最大值. 如果在一内点 W_0 有

$$u(W_0)>M+\varepsilon. \tag{5.10.3}$$

作

$$v(Z)=u(Z)+\eta\mathrm{tr}((Z-W_0)(\overline{Z-W_0})'),$$

这儿 η 是一个小的正数, 使得

$$\eta\max_{Z\in\mathfrak{L}_\mathrm{I}}\mathrm{tr}((Z-W_0)(\overline{Z-W_0})')\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon.$$

对任一点 $P\in\mathfrak{L}_\mathrm{I}$, 我们有

$$\begin{aligned}v(W_0)=u(W_0)&\geqslant u(P)+\varepsilon\\&=v(P)-\eta\mathrm{tr}((P-W_0)(\overline{P-W_0})')+\varepsilon\\&>v(P)+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

即 $v(Z)$ 在 $\mathfrak{R}_\mathrm{I}$ 的内点取最大值.

又

$$\mathrm{tr}\Delta_Z v(Z)=\mathrm{tr}\Delta_Z u(Z)+\eta\mathrm{tr}\Delta_Z(\mathrm{tr}(Z-W_0)(\overline{Z-W_0})')$$

$$= \eta \mathrm{tr}(I - Z\overline{Z}')\mathrm{tr}(I - \overline{Z}'Z), \tag{5.10.4}$$

由于 $\mathrm{tr}(I - Z\overline{Z}')\mathrm{tr}(I - \overline{Z}'Z) > 0$, 这结果与定理 5.10.2 相矛盾.

我们有以下的推论:

定理 5.10.3 ξ 类的调和函数若在 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上等于 0, 则恒等于 0.

定理 5.10.4 ξ 类的每一调和函数可以唯一地用 Poisson 公式表出:

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})} \int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} u(U)P(Z, U)\dot{U}.$$

定理 5.10.5 如果一个 ξ 类的调和函数在内点取最大 (或小) 值, 则它一定是常数.

附记 可以直接算出

$$\Delta_Z P(Z, U) = 0 \quad (= O^{(m)}),$$

这是一个 m^2 个二级偏微分方程组成的微分方程组. 由此可知, 任一在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上调和的函数一定同时适合 m^2 个二级偏微分方程. 这是一个值得注意的现象.

§5.11 调和函数的基底

假定 $m = n$, 而且命

$$A_{f_1, \cdots, f_n}(U) = A_f(U) = (a_{ij}^f(U))_{l \leqslant i,j \leqslant N(f)},$$

则酉群 U_n 的以 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 为标签的酉表示的阶是 $N(f) = N(f_1, \cdots, f_n)$, 易于阐明函数系

$$\varphi_{ij}^f(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})}} a_{ij}^f(U) \tag{5.11.1}$$

成一 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的正交正常系. 由定理 1.3.1 并取 $\rho = 1$ 得

$$\det(I - Z\overline{U}')^{-n} = \sum_{f \geqslant 0} N(f)\mathrm{tr}(A_f(Z\overline{U}'))$$

$$= V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}) \sum_{f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} \sum_{i,j}^{N(f)} \varphi_{ij}^f(Z)\overline{\varphi_{ij}^f(U)}. \tag{5.11.2}$$

这级数在

$$rI - Z\overline{Z}' > 0 \tag{5.11.3}$$

的闭包中一致收敛 $(0<r<1)$. 表示成

$$a_{ij}^f(U)\overline{a_{st}^g(U)},\quad f\geqslant 0,\quad g\geqslant 0$$

在

$$A_f(U)\times\overline{A_g(U)}$$

中出现, 后者可以分解为以下的直和

$$\sum_k A_h(U).$$

这儿 $N(f)N(g)=\Sigma N(h)$, $h=(h_1,\cdots,h_n)$, $h_1\geqslant h_2\cdots\geqslant h_n$. 因此

$$a_{ij}^f(U)\overline{a_{ij}^g(U)}=\Sigma\lambda_{pq}^h a_{pq}^h(U),$$

这儿 $\Sigma|\lambda_{pq}^h|^2=1$. 因而

$$\varphi_{ij}^f(U)\overline{\varphi_{st}^g(U)}=\Sigma\mu_{pq}^h\varphi_{pq}^h(U),\tag{5.11.4}$$

此处

$$\mu_{pq}^h=\frac{\lambda_{pq}^h\sqrt{N(f)N(g)}}{\sqrt{V(\mathfrak{L}_{\rm I})N(h)}}.$$

由 (5.11.2) 可得 Poisson 核的展开式

$$\begin{aligned}\frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\rm I})}\frac{\det(I-Z\overline{Z}')^n}{|\det(I-Z\overline{U})|^{2n}}=&V(\mathfrak{L}_{\rm I})\sum_{f\geqslant 0}\sum_{g\geqslant 0}\det(I-Z\overline{Z}')^n\\&\times\sum_{i,j}\sum_{s,t}\varphi_{ij}^f(\overline{U})\varphi_{ij}^f(Z)\varphi_{st}^g(U)\varphi_{st}^g(Z)\\=&\sum_h\sum_{i,j}\Phi_{ij}^h(Z)\overline{\varphi_{ij}^h(U)}.\end{aligned}\tag{5.11.5}$$

仍能证明 (5.11.5) 在 (5.11.3) 的闭包中一致收敛.

由此推出

$$\Phi_{ij}^h(Z)=\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}P_{\rm I}(Z,U)\varphi_{ij}^h(U)\dot{U}\tag{5.11.6}$$

及

$$\lim_{Z\to U}\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi_{ij}^h(U),\tag{5.11.7}$$

故得

定理 5.11.1　调和函数系

$$\Phi_{ij}^h(Z)$$

成为 ξ 类调和函数的基底.

§5.12　酉群上 Fourier 级数的 Abel 求和

定义　如果

$$\lim_{Z\to U}\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi(U),$$

则称 Fourier 级数

$$\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\varphi_{ij}^h(U)$$

A 求和收敛于 $\varphi(U)$.

定理 5.12.1　一个酉群上的连续函数的 Fourier 级数一定 A 收敛于其自己.

这定理由定理 5.9.1 及展式 (5.11.5) 推得.

其次, 命

$$\mathscr{L}_h(Z)=\sqrt{\frac{V(\mathfrak{L}_{\rm I})}{N(f)}}(\Phi_{ij}^f(Z))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)},$$

则有

$$\mathscr{L}_h(Z)=\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}P_{\rm I}(Z,U)A_h(U)\dot{U}. \tag{5.12.1}$$

由于任一 n 行列的方阵 Z 可以表成为

$$Z=V\Lambda W,$$

这儿 V,W 是酉方阵, $\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$ 是对角线方阵 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$. 如果 Z 在 (5.11.3) 中, 则

$$r^{\frac{1}{2}}>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0.$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_h(Z)&=\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}P_{\rm I}(V\Lambda W,U)A_h(U)\dot{U}\\&=\int_{\mathfrak{L}_{\rm I}}P_{\rm I}(\Lambda,\overline{V}'U\overline{W}')A_h(U)\dot{U}\\&=A_h(V)\mathscr{L}_h(\Lambda)A_h(W),\end{aligned} \tag{5.12.2}$$

这儿换了变数 $U\to VUW$.

特别命 $\Lambda=\lambda I$, 则有

$$A_h(V)\mathscr{L}_h(\lambda I)=\mathscr{L}_h(\lambda I)A_h(V).$$

由 Schur 氏引理, 得

$$\mathscr{L}_h(\lambda I) = \rho_h(\lambda) I^{N(h)},$$

而且当 $\lambda \to 1$ 时, $\rho_h(\lambda) \to 1$.

因此, 我们有更具体的特殊形式:

定理 5.12.2 对任一 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的连续函数 $\varphi(U)$, 我们有

$$\varphi(U) = \lim_{\lambda \to 1} \sum_h \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U), \tag{5.12.3}$$

此处

$$c_{ij}^h = \frac{1}{V(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}})} \int_{\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) \overline{\varphi_{ij}^h(U)} \dot{U}. \tag{5.12.4}$$

由此可以立刻推出 Peter-Weyl 定理的较精确的形式:

定理 5.12.3 酉群 $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ 上的任一连续函数 $\varphi(U)$, 可依 $\{\varphi_{ij}^h(U)\}$ 的线性组合逼近之.

证 由 (5.12.3) 可知, 给了任一 $\varepsilon > 0$, 我们能取 λ 接近于 1 使

$$\left| \varphi(U) - \sum_h \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再能取 N 使其大得可致

$$\left| \varphi(U) - \sum_{N \geqslant h_1 \geqslant \cdots \geqslant h_n \geqslant -N} \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \varepsilon.$$

附记 1. 由于酉群 U_n 的任一紧致分群上的连续函数可以扩充为 U_n 上的连续函数, 从定理 5.12.3 可以推得, 以上的结果对任一有限维的紧致群都正确.

2. U_n 对其一紧致分群的傍系上定义的连续函数, 也可以看成 U_n 上的连续函数. 因此, 由定理 5.12.3 可以推得, 以上的结果对任意的有限维紧致齐性空间也正确 (仅需对分群求平均即可).

第六章　对称及斜对称方阵双曲空间的调和分析

§6.1　对称酉方阵上的正交系

现在研究具体地求出 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 上及 $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ 上的完整正交正常系的问题. 先研究变形

$$T = USU', \tag{6.1.1}$$

这一变形变对称酉方阵 S 为对称酉方阵 T, 此处 U 是一酉方阵. 将对称方阵 $S = (s_{ij})$ 的元素排列成为

$$s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, \cdots, \sqrt{2}s_{1n}, s_{22}, \sqrt{2}s_{23}, \cdots, \sqrt{2}s_{2n}, \cdots, s_{n-1,n-1}, \sqrt{2}s_{n-1,n}, s_{nn},$$

这看成为一个 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维的矢量, 用 s 代表. 将对应于 T 的矢量写为 t, 如此则当 S 经过 (6.1.1) 而变为 T 时, s 也经过一线性变换而变为 t. 这一线性变换的方阵是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 行列的, 并且我们知道它就是 $U^{[2]}$.

再从矢量 s 做出 $s^{[f]}$, 则 $s^{[f]}$ 是一个

$$\frac{\left(\frac{1}{2}n(n+1)+f-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)!}$$

维的矢量, 其上所进行的线性变形的方阵也就是

$$(U^{[2]})^{[f]}. \tag{6.1.2}$$

$s^{[f]}$ 中的支量是 s_{ij} 的 f 次齐次式. 任一 f 次齐次式可以表成为 $s^{[f]}$ 的支量的线性组合, 且诸支量间无任何线性关系.

定理 1.5.2 及定理 1.4.2 说明了群表示可以分解为如次的不可分解的表示的直和, 也说明了 s_{ij} 的 f 次齐次多项式所张的空间可以分解为以下的一些子空间的直和, 其维数各为 $N(2f_1, \cdots, 2f_n), f_1 + \cdots + f_n = f$. 张此子空间的支量命之为

$$\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S), \quad i = 1, 2, \cdots, N(2f_1, \cdots, 2f_n). \tag{6.1.3}$$

当 S 经 (6.1.1) 而变为 T 时, (6.1.3) 经 $A_{2f_1,\cdots,2f_n}(U)$ 而变为 $\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(T)$. (6.1.3) 所成的函数系在 $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$ 上是正交的, 即

$$\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)\overline{\varphi^{(j)}_{g_1,\cdots,g_n}(S)}\dot{S} = \delta_{ij}\delta_{f,g}\beta_f,$$

此处积分元素已在 §3.5 中定义. 命

$$\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)=\frac{\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)}{\sqrt{\rho_{f_1,\cdots,f_n}}},$$

则 $\{\psi^{(i)}_f(S)\}$ 是 $\mathfrak{C}_{\rm II}$ 上的正交正常系.

§6.2 核的在子空间中的投影

今往讨论函数

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{T})=\sum_i\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)\overline{\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(T)},\tag{6.2.1}$$

首先有

$$\int_{\mathfrak{C}_{\rm II}}\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{S})\dot{S}=N(2f_1,\cdots,2f_n).\tag{6.2.2}$$

由于 $\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{S})$ 与 S 并无关系, 因此得出

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{S})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\rm II})}N(2f_1,\cdots,2f_n).$$

$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{S})$ 虽然如此简单, 但是具体算出 (6.2.1) 并不简单. 现在把这运算叙述如下：先定义 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的次序. 若 $f>g$, 即 $(f_1,\cdots,f_n)>(g_1,\cdots,g_n)$, 其意义为 $f_1=g_1,\cdots,f_{i-1}=g_{i-1}$, $f_i>g_i$, 如此把所有的表示都可以依次序排列出来. 由 (6.1.1) 可知

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(T)=A_{f_1,\cdots,f_n}(U)A_{f_1,\cdots,f_n}(S)A_{f_1,\cdots,f_n}(U').\tag{6.2.3}$$

由 $A_{f_1,\cdots,f_n}(S)$ 的元素所张开的线性空间命之为 L. 显然当 S 变为 T 时, L 变为其自己, 即 L 是一不变子空间. 这一不变子空间必能表成对应于 $A_{2g_1,\cdots 2g_n}(X)$ 的子空间的直和. 从具体的性质极易看到 $(2g_1,\cdots,2g_n)\leqslant(2f_1,\cdots,2f_n)$, 并且等号情形一定出现.

命

$$\sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(S)A_{f_1,\cdots,f_n}(\overline{T}))=\sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(S\overline{T})),$$

则当 S 及 T 各换以 $S_1=USU'$ 及 $T_1=UTU'$ 时, 此式不变, 即上式等于

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\overline{T}).$$

由以上说明可见

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\overline{T})=\sum_{g\leqslant f}c_{f,g}\,\Psi_{g_1,\cdots,g_n}(S,\overline{T}),\tag{6.2.4}$$

并且 $c_{f,f} \neq 0$. 这一线性关系显然是可以反转过来的, 即

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{T}) = \sum_{g\leqslant f} d_{f,g}\chi_{g_1,\cdots,g_n}(S\overline{T}). \tag{6.2.5}$$

所以今后可简书为

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\overline{T}) = \Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S\overline{T}).$$

今往给与一个有效的办法算出 (6.2.5) 的系数来. 由于 $c_{f,g}$ 与 $d_{f,g}$ 仅当 $g \leqslant f$ 时有定义, 今定义当 $f < g$ 时, $c_{f,g} = g_{f,g} = 0$. 由于指标 $f = (f_1,\cdots,f_n)$ 已经排好, 今可以把 f 看成为一个单码, 即依序定义 $f = 1,2,3,\cdots$. 此即调方阵

$$C = (c_{f,g})_{1\leqslant f,g\leqslant k} \text{ 及 } D = (d_{f,g})_{1\leqslant f,g\leqslant k}$$

皆为非奇异的三角形方阵.

今研究积分

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\overline{T})\chi_g(T\overline{S})\dot{S}\dot{T}.$$

先由 (6.2.4) 再由 (6.2.1), 此积分等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\int_S\int_T \Psi_f(S\overline{T})\Psi_h(T\overline{S})\dot{S}\dot{T}\\
=&\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\sum_i\sum_j\int_S\int_T \psi_f^{(i)}(S)\overline{\psi_f^{i}(T)}\psi_h^{(j)}(T)\overline{\psi_h^{(j)}(S)}\dot{S}\dot{T}\\
=&\sum_{h\leqslant g}\sum_i\sum_j c_{g,h}\delta_{ij}\delta_{f,h} = N\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\delta_{f,h}.
\end{aligned}$$

即得当 $g < f$ 时, 我们有

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\overline{T})\chi_g(T\overline{S})\dot{S}\dot{T} = 0 \tag{6.2.6}$$

及

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\overline{T})\chi_f(T\overline{S})\dot{S}\dot{T} = Nc_{f,f} \neq 0. \tag{6.2.7}$$

命

$$\beta_{f,g} = \int_S\int_T \chi_f(S\overline{T})\chi_g(T\overline{S})\dot{S}\dot{T}. \tag{6.2.8}$$

由 (6.2.6), (6.2.7), (6.2.5) 及 (6.2.8) 可知

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\beta_{h,g} = 0, \quad \text{若 } g < f \tag{6.2.9}$$

及

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\beta_{h,f} = Nc_{f,f}. \tag{6.2.10}$$

显然, 对任一 k 方阵, $B=(\beta_{h,f})_{1\leqslant h,f\leqslant k}$ 是定正的. 方程 (6.2.9) 及 (6.2.10) 可以用方阵符号写出如下:

$$DB=\begin{pmatrix} N_1c_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & N_2c_{2,2} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_kc_{k,k} \end{pmatrix}=K,$$

即 $d_{f,g}$ 可以用 $\beta_{f,g}$ 及 K 之元素表出来. 但 K 中的元素并不全知, 因此我们必须另想办法. 把方程组 (6.2.10) 变为另一方程组且用递归法解出 $d_{f,g}$, 求解时将用到 $\beta_{f,g}$ 及其他一些易于算出的常数.

命

$$\alpha_f=\int_S\chi_f(S\overline{S})\dot{S}. \tag{6.2.11}$$

在 (6.2.5) 中命 $S=T$ 且对 S 积分, 可知

$$\sum_{g\leqslant f}d_{f,g}\alpha_g=N(=N(2f_1,\cdots,2f_n)). \tag{6.2.12}$$

当 $f=1$ 时, 显然有 $d_{1,1}=N_1/\alpha_1$. 假定当 $f\leqslant k-1$ 时 $d_{1,g}(g=1,\cdots,f)$ 已由 $d_{f,g}$ 及 α_f 表出, 今往研究 $f=k$ 的情形. 由方程 (6.2.9) 及 (6.2.12) 我们能算出以下的方阵关系:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{f_1} & d_{f_2} & d_{f_3} & \cdots & d_{f_f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1,f-1} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2,f-1} & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{f,1} & \beta_{f,2} & \cdots & \beta_{f,f-1} & \alpha_f \end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix} d_{11}\beta_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & d_{11}\beta_{12}+d_{22}\beta_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

右边的三角方阵是非奇异的, 盖由 (6.2.10) 可知其对角线上的元素皆不等于 0. 因为 D 是 C 的逆方阵, 所以

$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1,f-1} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2,f-1} & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{f,1} & \beta_{f,2} & \cdots & \beta_{f,f-1} & \alpha_f \end{pmatrix}$$

也是可逆的. 故

$$(d_{f,1}, d_{f,2}, \cdots, d_{f,f}) = (0, \cdots, 0, N)\beta^{-1},$$

即诸 $d_{f,1}, \cdots, d_{f,f}$ 都可以用 $\beta_{f,g}$ 及 d_f 表出来. 于是剩下的问题在于算出 $\beta_{f,g}$ 及 α_f 的数值.

任一酉对称方阵 S 可以表成为 $S = UU'$, 此处 U 是酉方阵. 命 $T = UWU'$, 由于

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\overline{T}) = \chi_{f_1,\cdots,f_n}(UW\overline{U}') = \chi_{f_1,\cdots,f_n}(W),$$

可得

$$\beta_{f,g} = \int_{\mathfrak{C}_{\rm II}} \dot{S} \int_{\mathfrak{C}_{\rm II}} \chi_g(W)\overline{\chi_f(W)}\dot{W}.$$

用 (3.5.19) 可以算出

$$\begin{aligned}\beta_{f,g} =& V(\mathfrak{C}_{\rm II})C \mathop{\int\cdots\int}_{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0} \chi_g([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]) \\ &\times \overline{\chi_f([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}])} \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| d\theta_1 \cdots d\theta_n, \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

其中

$$C = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \int_{\{0\}} \{\dot{0}\}.$$

由于

$$e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} = 2i \sin\frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu) e^{\frac{i}{2}(\theta_\nu + \theta_\mu)}, \tag{6.2.15}$$

可知

$$\begin{aligned}\beta_{f,g} =& V(\mathfrak{C}_{\rm II})C2^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathop{\int\cdots\int}_{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0} \chi_g([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]) \\ &\times \chi_f([e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]) \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} \sin\frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu) d\theta_1 \cdots d\theta_n. \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

以下的计算方法在实际运算时较为方便. 由 (6.2.15) 可知

$$\begin{aligned}|e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| &= 2\sin\frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu)\operatorname{sgn}(\theta_\nu - \theta_\mu) \\ &= -i(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu})e^{-\frac{1}{2}i(\theta_\nu+\theta_\mu)}\operatorname{sgn}(\theta_\nu - \theta_\mu);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| \\ =&(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} (e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}) e^{-\frac{1}{2}i(n-1)(\theta_1+\cdots+\theta_n)} \operatorname{sgn} \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} (\theta_\nu - \theta_\mu).\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\beta_{f,g} =& V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})C(-i)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \int_{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0}\cdots\int \chi_g([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]) \\ &\times \chi_f([e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}]) \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}(e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu})e^{-\frac{1}{2}(n-1)(\theta_1+\cdots+\theta_n)}d\theta_1\cdots d\theta_n.\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

由于

$$\chi_g([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}(e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu})$$

是一形如 $M_{g_1,\cdots,g_n}([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])$ 的式子，而 $\chi_{f_1,\cdots,f_n}([e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}])$ 可由 S-函数表出，因之对任一具体情形都可以计算得出来. 但美中不足的是并未算出 $\beta_{f,g}$ 的一般表示法.

§6.3 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的正常正交函数系

由上节的结果可知

$$\{\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z)\}$$

也是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 域的正交完整系，因此问题在于算出

$$\rho_f=\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}|\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z)|^2\dot{Z}.$$

已知此 ρ_f 与 i 无关，因此

$$\rho_f N_{2f_1,\cdots,2f_n}=\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(Z\overline{Z}')\dot{Z}.$$

由于 (6.2.5)，因之我们的问题在于算出

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}\chi_{f_1,\cdots,f_n}(Z\overline{Z}')\dot{Z}.$$

由 (3.5.2) 可知，此积分等于

$$\begin{aligned}&2^{\frac{n(n+1)}{2}}\int_U\dot{U}\int_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant 1}\cdots\int\prod_{j<k}|\lambda_j^2-\lambda_k^2|\chi_{f_1,\cdots,f_n}([\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2])\lambda_1\cdots\lambda_n d\lambda_1\cdots d\lambda_n\\ =&2^{\frac{n(n+1)}{2}}\omega_n'\int_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant 1}\cdots\int\begin{vmatrix}\lambda_1^{2l_1}&\cdots&\lambda_1^{2l_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \lambda_n^{2l_1}&\cdots&\lambda_n^{2l_n}\end{vmatrix}\lambda_1\cdots\lambda_n d\lambda_1\cdots d\lambda_n\end{aligned}$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_n'\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}\tau_1^{2l_{i_1}+1}\tau_2^{2l_{i_1}+2l_{i_2}+3}\cdots\tau_n^{2l_{i_1}+\cdots+2l_{i_n}+2n-1}d\tau_1\cdots d\tau_n$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_n'\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}\lambda_1^{l_{i_1}}\lambda_2^{l_{i_1}+l_{i_2}+1}\cdots\lambda_n^{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}+n-1}d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_n'\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}\frac{1}{l_{i_1}+1}\cdot\frac{1}{l_{i_1}+l_{i_2}+2}\cdots\frac{1}{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}+n}$$

$$=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{D(l_1,\cdots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j+2)}\omega_n'.$$

这里应用了以下的

引理

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}\frac{1}{l_{i_1}}\frac{1}{l_{i_1}+l_{i_2}}\cdots\frac{1}{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}}=\frac{2^nD(l_1,\cdots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j)}.$$

证　当 $n=2$ 时, 显然为真. 今假定当 $n-1$ 时此定理真实, 上式等于

$$\frac{2^{n-1}}{l_1+l_2+\cdots+l_n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{D(l_1,\cdots,l_{i-1},l_{i+1},\cdots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(l_j+l_k)}\prod_{j=1}^{n}(l_i+l_j)$$

$$=\frac{2^{n-1}}{\sigma_1\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(l_j+l_k)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\cdots,l_{i-1},l_{i+1},\cdots,l_n)$$
$$\times(l_i^n+\sigma_1l_i^{n-1}+\sigma_2l_i^{n-2}+\cdots),$$

此处 σ_ν 等于 $l_1,\cdots,l_n$ 的 ν 次基本对称函数. 由于

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\cdots,l_{i-1},l_{i+1},\cdots,l_n)l_i^n=\sigma_1D(l_1,\cdots,l_n),$$
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\cdots,l_{i-1},l_{i+1},\cdots,l_n)l_i^{n-1}=D(l_1,\cdots,l_n),$$

及其他诸项等于 0, 故得定理.

§6.4　斜对称空间的特征流形

(3.6.2) 及 (3.6.16) 所表的流形作为 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的流形 $\mathfrak{C}_{\rm III}$, 其上的体积元素已由 §3.6 定义. 研究变形

$$L=UKU',\tag{6.4.1}$$

此处 K 及 L 是斜对称方阵. 将 $K=(k_{ij})$ 的元素排成

$$k_{12},\cdots,k_{1n},k_{23},\cdots,k_{2n},\cdots,k_{n-1,n},$$

这看成一个 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维的矢量, 用 k 代表. 将对应于 L 的矢量写成为 l, 则当 K 经 (6.4.1) 而变为 L 时, k 经 $U^{(2)}$ 而变为 l.

矢量 $k^{[f]}$ 是一个

$$\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+f-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}$$

维的矢量, 其上所进行的线性变形的方阵也就是

$$(U^{(2)})^{[f]}. \tag{6.4.2}$$

由定理 1.5.3 及定理 1.4.3 可知, $k^{[f]}$ 所在的空间分为以下的一些子空间的直和, 其维数各为 $N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots)$. 张此子空间的支量命之为

$$\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_{[\frac{1}{2}n]}}(K),\quad i=1,2,\cdots,N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots).$$

我们不难证明

$$\int_{\mathfrak{R}_{\rm III}}\psi_f^{(i)}(Z)\overline{\psi_g^{(j)}(Z)}\dot{Z}=\begin{cases}0, & 若\ (f)\neq(g)\ 或\ i\neq j;\\ \rho_f, & 若\ (f)=(g)\ 及\ i=j.\end{cases}$$

及

$$\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}}\psi_f^{(i)}(K)\overline{\psi_g^{(j)}(K)}\dot{K}=\begin{cases}0, & 若\ (f)\neq(g)\ 或\ i\neq j;\\ \beta_f, & 若\ (f)=(g)\ 及\ i=j.\end{cases}$$

用与对称方阵相似的方法可以推出斜对称方阵相应的结果来.

第七章　超球双曲空间的调和分析

§7.1　超球多项式

为了读者易于了解起见, 现在从头叙述超球多项式及球调和分析的若干知识. 超球多项式的定义是: 当 $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$P_r^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{0\leqslant l\leqslant \frac{1}{2}r} (-1)^l \frac{\Gamma(r-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)l!(r-2l)!}(2\boldsymbol{\xi})^{r-2l}. \tag{7.1.1}$$

用级数展开法, 我们可以证明

$$(1-2\boldsymbol{\xi}w+w^2)^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})w^m. \tag{7.1.2}$$

我们将用到关于超球多项式的 Rodrique 公式

$$(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{(-2)^m}{m!}\frac{\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\left(\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}}\right)^m(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}. \tag{7.1.3}$$

关于这一公式的证明, 读者可依以下的提示自己补出. 先由 (7.1.1) 证明 $\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}}P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}) = 2\lambda P_{m-1}^{(\lambda+1)}(\boldsymbol{\xi})$, 再用归纳法.

假定 $f(\xi)$ 是一个在 $[+1,-1]$ 之间且有 m 次微商的函数, 由 (7.1.3) 可知

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} f(\boldsymbol{\xi})P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi \\ =& \frac{(-2)^m\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{+1} f(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\boldsymbol{\xi}.\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

用部分积分法可知

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} f(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}}\right)^m(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi \\ =& f(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f'(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}}\right)^{m-1}(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.\end{aligned}$$

由于 $\lambda > -\frac{1}{2}$, 故

$$\left(\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{+1} = 0.$$

因得

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi = -\int_{-1}^{+1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.$$

续行此法, 最后得出

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} f(\xi)P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

如果 $f(\xi)$ 是一 m 次多项式, 其最高方次的系数等于 a, 则得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} f(\xi)P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}a\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)\Gamma(m+\lambda+1)}a.\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

特别取 $f(\xi)=P_l^{(\lambda)}(\xi)$ 并与 (7.1.5) 联合可得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} P_l^{(\lambda)}(\xi)P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\begin{cases}0, & 若 l\neq m,\\ \dfrac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(m+2\lambda)}{(\Gamma(\lambda))^2(m+\lambda)\Gamma(m+1)}, & 若 l=m.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

又在 (7.1.5) 中取 $f(\xi)=\xi^l$, 则当 $l\geqslant m$ 时

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}\xi^l P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\binom{l}{m}\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}\xi^{l-m}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

当 $l-m$ 为奇数时, 此积分之值等于零. 若 $l-m=2k$, 则由于

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\xi^{l-m}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi &= \int_0^{+1}\xi^{k-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi\\ &=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+m+\lambda+1)},\end{aligned}$$

得出

$$\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{\xi}^l P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\boldsymbol{\xi}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若} l<m \text{或} l-m \text{是奇数},\\ \dfrac{\pi}{2^{l+2\lambda-1}}\dfrac{l!}{k!(l-2k)!}\dfrac{\Gamma(l-2k+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(l-k+\lambda+1)}, & \text{若} l=m+2k.\end{cases} \tag{7.1.9}$$

任一 m 次多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 一定可以表成为

$$f(\boldsymbol{\xi})=\sum_{l=0}^{m}a_l P_l^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})$$

的形式. 乘以 $P_l^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, 且由 $+1$ 到 -1 求积分可得

$$a_l=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)\Gamma(l+1)}{\pi\Gamma(l+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}f(\boldsymbol{\xi})P_l^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})(1-\boldsymbol{\xi}^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\boldsymbol{\xi}.$$

由此显然推出

定理 7.1.1 如果任一 m 次多项式 $f(\boldsymbol{\xi})$ 适合于 $a_l=0(0\leqslant l\leqslant m-1)$, 则 $f(\boldsymbol{\xi})$ 与 $P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})$ 仅相差一常数因子.

根据这一表法及 (7.1.9) 可得

$$\boldsymbol{\xi}^m=\frac{m!\Gamma(\lambda)}{2^m}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m-2k+\lambda}{k!\Gamma(m-k+\lambda+1)}P_{m-2k}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}). \tag{7.1.10}$$

在下文中我们还需要以下的公式:

当 $\nu>\lambda$ 时

$$P_m^{(\nu)}(\boldsymbol{\xi})=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}c_k P_{m-2k}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}), \tag{7.1.11}$$

此处

$$c_k=\frac{m-2k+\lambda}{k!}\frac{\Gamma(k+\nu-\lambda)}{\Gamma(\nu-\lambda)}\frac{\Gamma(m+\nu-k)}{\Gamma(m+\lambda+1-k)}. \tag{7.1.12}$$

这公式的证明如次: 由 (7.1.1) 及 (7.1.10) 可知

$$\begin{aligned}P_m^{(\nu)}(\boldsymbol{\xi})&=\sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}m]}(-1)^s\frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(s+1)\Gamma(m-2s+1)}(2\boldsymbol{\xi})^{m-2s}\\ &=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}m]}(-1)^s\frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(s+1)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]-s}\frac{m-2s-2k+\lambda}{k!\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)}P_{m-2s-2k}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \sum_{t=0}^{[\frac{1}{2}m]} c_t P_{m-2t}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}),$$

此处

$$c_t = \sum_{s+k=t} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)(m-2s-2k+\lambda)}{s!k!\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)}$$

$$= \frac{m-2t+\lambda}{t!} \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(m-t-s+\lambda+1)}$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)\Gamma(t+\nu-\lambda)\Gamma(\nu+m-t)}{t!\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-t+\lambda+1)}.$$

$\Big($注意，此处用了以下的公式：命 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^q f(x) = \Delta^{q-1}(\Delta f(x))$，而 $\Delta^q f(x) = \sum_{l=0}^{q} (-1)^l \binom{q}{l} f(x+q-l)$. 由于 $\Delta \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = (\alpha-\beta) \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+1)}$，可知当 $\alpha > \beta$ 时，$\Delta^q \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-q+1)} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+q)}$.$\Big)$

§7.2 球面上的调和分析

命 γ 表示 n 维实数空间的单位超球面 (或简称球面)，即 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 适合于

$$xx' = 1. \tag{7.2.1}$$

习知这球面有次之襄变量表示法：

$$x_r = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{r-1} \cos\theta_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant n-1,$$

$$x_n = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1},$$

其中 θ 的变化范围是

$$0 \leqslant \theta_r \leqslant \pi \quad (1 \leqslant r \leqslant n-2), \quad 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

在这种表法之下，超球的表面积元素是

$$\dot{x} = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}. \tag{7.2.2}$$

今往求出球面上的一个正交正常系.

命 u 表一实矢量, 做这矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 f 次对称幂 $u^{[f]}$, 即由支量

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1!\cdots j_n!}}u_1^{j_1}\cdots u_n^{j_n}, \quad j_1+\cdots+j_n=f$$

所成的矢量, 这矢量的维数等于

$$N_f=\frac{1}{f!}n(n+1)\cdots(n+f-1).$$

易证

$$u^{[f]}\nu^{[f]'}=(u\nu')^f,$$

故

$$x^{[f]}x^{[f]'}=1.$$

今研究实正交变换

$$\nu=uT, \quad TT'=I, \tag{7.2.3}$$

由此得出

$$\nu^{[f]}=u^{[f]}T^{[f]}.$$

今往分解 $\boldsymbol{u}^{[f]}$ 为不可再分的子空间. 显然

$$(uu')u^{[f-2]}$$

是 $u^{[f]}$ 的一个不变子空间, 它的维数等于 N_{f-2}. 因之, 可以证明 $T^{[f]}$ 可以分解为以下的直和

$$T_f\dot{+}T_{f-2}\dot{+}\cdots\dot{+}T_{f-2[\frac{1}{2}f]}. \tag{7.2.4}$$

习知这些 T_r 是不可分解的 (Murnaghan[1], 242 页), 并且是互不相似的, 此处 T_r 是 N_r-N_{r-2} 行列的方阵. 不妨假定他们都是正交方阵, 命 T_{f-2l} 所行施的子空间的矢量 $V_{f-2l}(u)$ 的支量是

$$(uu')^l\varphi_{f-2l}^{(i)}(u), \quad i=1,2,\cdots,N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)}.$$

用以上屡用的方法 (Schur 引理) 可以证明

定理 7.2.1 若 $r\neq s$ 或 $i\neq j$, 则

$$\int_\gamma \varphi_r^{(i)}(x)\varphi_s^{(j)}(x)\dot{x}=0 \tag{7.2.5}$$

及

$$\int_\gamma |\varphi_r^{(i)}(x)|^2\dot{x}=\beta_r, \tag{7.2.6}$$

此 β_r 与 i 无关.

命

$$\psi_r^{(i)}(u) = \varphi_r^{(i)}(u)/\sqrt{\beta_r},$$

则这些函数在球面上成一正交正常函数系.

§7.3 核在子空间的投影

现在我们研究函数

$$\Phi_r(u, v) = V_r(u)V_r(v)' = \sum_{i=0}^{m} \psi_r^{(i)}(u)\psi_r^{(i)}(v), \quad m = N_r - N_{r-2}. \tag{7.3.1}$$

显然对任一正交方阵 T 常有

$$\begin{aligned}\Phi_r(uT, vT) &= V_r(uT)V_r(vT)' = V_r(u)T_rT_r'V_r(v)' \\ &= V_r(u)V_r(v)' = \Phi_r(u, v),\end{aligned}$$

故 $\Phi_r(u, v)$ 是正交群下的一个不变量. 由不变量论中的定理 (Weyl [2], 53 页) 可知, $\Phi_r(u, v)$ 是 uu', vv' 及 uv' 的函数. 又 $\Phi_r(u, v)$ 是 u 中元素的 r 次齐次式及 v 中元素的 r 次齐次式, 因此, $\Phi_r(u, v)$ 可以写成为

$$\Phi_r(u, v) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}r} c_{l,r}(uv')^{r-2l}(uu'vv')^l.$$

如 $u = x$, $v = y$ 皆在球上, 则得

$$\Phi_r(x, y) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}r} c_{l,r}(xy')^{r-2l};$$

命之为

$$\Phi_r(x, y) = Q_r(\xi), \quad \xi = xy', \tag{7.3.2}$$

此 ξ 乃 x 及 y 二点向中心联线所得的交角的余弦.

由公式 (7.3.1) 及 (7.2.5) 可知

$$\int_\gamma\int_\gamma \Phi_r(x, y)\Phi_s(x, y)\dot{x}\dot{y} = \begin{cases} 0, & 若 s \neq r, \\ N_r - N_{r-2}, & 若 s = r. \end{cases} \tag{7.3.3}$$

将 (7.3.2) 代入 (7.3.3) 可知

$$\int_\gamma\int_\gamma Q_r(xy')Q_s(xy')\dot{x}\dot{y} = \begin{cases} 0, & 若 s \neq r, \\ N_r - N_{r-2}, & 若 s = r. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

固定了 x, 有一行列式是 1 的正交方阵 T 使 $xT=(1,0,\cdots,0)$. 对 y 积分并施行变换 $w=yT$, 则积分 (7.3.4) 等于

$$\int_\gamma\int_\gamma Q_r(w_1)Q_s(w_1)\dot{w}\dot{x}=\omega\int_\gamma Q_r(w_1)Q_s(w_1)\dot{w},$$

此处 ω 等于 (7.2.1) 的总面积. 行变换

$$w_1=\xi,\quad w_i=(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\xi_i,\quad 2\leqslant i\leqslant n,$$

则积分 (7.3.4) 等于

$$\begin{aligned}
&\omega\int_\gamma Q_r(w_1)Q_s(w_1)\dot{w}\\
&=2\omega\underset{w_1^2+\cdots+w_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\cdots\int}Q_r(w_1)Q_s(w_1)\frac{dw_1\cdots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\cdots-w_{n-1}^2}}\\
&=2\omega\int_{-1}^{+1}Q_r(w_1)Q_s(w_1)dw_1\underset{w_2^2+\cdots+w_{n-1}^2\leqslant 1-w_1^2}{\int\cdots\int}\frac{dw_2\cdots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\cdots-w_{n-1}^2}}\\
&=2\omega\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi)Q_s(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}d\xi\underset{\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\cdots\int}\frac{d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}}{\sqrt{1-\xi_2^2-\cdots-\xi_{n-1}^2}}\\
&=2\omega\omega'\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi)Q_s(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}d\xi,
\end{aligned}\tag{7.3.5}$$

此处 ω' 是 $\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=1$ 的总面积. 由 (7.3.4) 及 (7.3.5) 可知

$$\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi)Q_s(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}d\xi=\begin{cases}0, & 若 r\neq s,\\ (N_r-N_{r-2})/\omega\omega', & 若 r=s.\end{cases}\tag{7.3.6}$$

由定理 7.1.1 可知

$$Q_r(\xi)=cP_r^{(\frac{1}{2}n-1)}(\xi).\tag{7.3.7}$$

今往定出 c 来. 由 (7.3.6) 及 (7.1.7) 可知

$$\begin{aligned}
\frac{N_r-N_{r-2}}{\omega\omega'}&=c^2\int_{-1}^{+1}(P_r^{(\frac{1}{2}n-1)}(\xi))^2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}d\xi\\
&=c^2\frac{2^{3-n}\pi\Gamma(r+n-2)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)\right)^2\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}$$

解此可得

$$c^2=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)\right)^2\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)r!}{4\pi^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n-1)}\cdot 2^{3-n}\pi\Gamma(r+n-2)}$$

$$\times\left(\binom{n+r-1}{r}-\binom{n+r-3}{r-2}\right)=2^{-2}\pi^{-n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)^2,$$

即得

$$c=\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right). \tag{7.3.8}$$

由此得出

$$\Phi_r(u,v)=\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)(uu'vv')^{\frac{1}{2}r}P_r^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{uv'}{\sqrt{uu'vv'}}\right). \tag{7.3.9}$$

§7.4 特征流形上的正交系

$\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\rm IV}$ 是由以下的点

$$u=e^{i\theta}x,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{7.4.1}$$

组成的, 此处 x 是 n 维空间的实矢量之适合于 (7.2.1) 者. 这流形上的体积元素是 $\dot{u}=d\theta\cdot\dot{x}$, 此 $\dot{x}$ 的定义见 §7.2.

作 $u^{[f]}$, 如 §7.2 作出 $\psi_r^{(i)}(u)$. $u^{[f]}$ 分为以下的子空间

$$\{(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\},\quad i=1,\cdots,N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)}$$

的直和.

由一般性的定理立刻得出

定理 7.4.1 若 $f\neq g$ 或 $l\neq k$ 或 $i\neq j$, 则有

$$\int_{\mathfrak{C}_{\rm IV}}(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\overline{(uu')^k}\,\overline{\psi_{g-2k}^{(j)}(u)}\dot{u}=0. \tag{7.4.2}$$

另一方面, 易证

$$\int_{\mathfrak{C}_{\rm IV}}|uu'|^{2l}|\psi_{f-2l}^{(i)}(u)|^2\dot{u}=\int_0^\pi d\theta\int_\gamma|\psi_{f-2l}^{(i)}(x)|^2\dot{x}=\pi, \tag{7.4.3}$$

故

$$(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)/\sqrt{\pi} \tag{7.4.4}$$

是 $\mathfrak{C}_{\rm IV}$ 上的一个正交正常函数系.

由此及 (7.3.9), (7.1.11), (7.1.2) 也可算出

$$H(z,\bar{u})=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l\leqslant\frac{1}{2}m}\sum_i(zz')^l\overline{(uu')}^l\psi_{m-2l}^{(i)}(z)\overline{\psi_{m-2l}^{(i)}(u)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l \leqslant \frac{1}{2}m} (zz'\overline{uu'})^l \Phi_{m-2l}(z, \bar{u})$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l \leqslant \frac{1}{2}m} \left(m - 2l + \frac{n}{2} - 1\right)(zz'\overline{uu'})^l (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}-l}$$

$$\times P_{m-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}} \left(\frac{1}{2}n-1\right) \sum_{m=0}^{\infty} (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}} P_m^{(\frac{1}{2}n)}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}} (1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'})^{-\frac{1}{2}n}. \tag{7.4.5}$$

附记. 由于 $uu' = e^{2i\theta}, \bar{u}'e^{2i\theta} = u'$, 可知

$$\begin{aligned} 1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'} &= \overline{uu'}(uu' - 2z\bar{u}'uu' + zz') \\ &= \overline{uu'}(uu' - 2zu' + zz') = \overline{uu'}(u-z)(u-z)', \end{aligned}$$

因此 Cauchy 公式变为

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)e^{i\theta_n}}{((e^{i\theta}x - z)(e^{i\theta}x - z)')^{\frac{1}{2}n}} d\theta \dot{x} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)}{((x - e^{-i\theta}z)(x - e^{-i\theta}z)')^{\frac{1}{2}n}} d\theta \dot{x}. \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

§7.5 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的正常正交完整系

在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 中已知

$$\{(zz')^l \psi_{f-2l}^{(i)}(z)\}$$

是正交完整系, 今往算出

$$\int \cdots \int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} |zz'|^{2l} |\psi_{f-2l}^{(i)}(z)|^2 \dot{z} = \tau_{l,f-2l},$$

即

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}\cdots\int |zz'|^{2l}\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\dot{z}=(N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)})\tau_{l,f-2l}. \tag{7.5.1}$$

如果从积分

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}\cdots\int (z\bar{z}')^t|zz'|^{2t}\dot{z}$$

算起, 并不容易. 现在我们另用他法. 从域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的核函数的定义可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{-n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{|zz'|^{2l}\Phi_{m-2l}(z,\bar{z})}{\tau_{l,m-2l}}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{|zz'|^m\left(m-2l+\dfrac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\tau_{l,m-2l}}P_{m-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}(\xi)\\&=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}n-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\sum_{m=0}^{\infty}|zz'|^m\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m-2l+\dfrac{n}{2}-1}{\tau_{l,m-2l}}P_{m-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}(\xi),\end{aligned}$$

此处 $\boldsymbol{\xi}=z\bar{z}'/|zz'|$.

另一方面, 由 (7.1.2) 可知

$$(1-2\boldsymbol{\xi}w+w^2)^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi})w^m.$$

即得

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}(1+|zz'|^2-2z\bar{z}')^{-n}=\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}\sum_{m=0}^{\infty}|zz'|^mP_m^{(n)}(\xi).$$

比较系数可得

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}P_m^{(n)}(\xi)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m-2l+\dfrac{n}{2}-1}{\tau_{l,m-2l}}P_{m-2l}^{(\frac{n}{2}-1)}(\xi).$$

再由 (7.1.11) 可知

$$P_m^{(\nu)}(\boldsymbol{\xi})=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}c_kP_{m-2k}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\xi}),$$

此处

$$c_k=\frac{(m-2k+\lambda)\Gamma(k+\nu-\lambda)\Gamma(m+\nu-k)}{k!\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-k+\lambda+1)}.$$

因此

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})\Gamma(n)l!\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m-l+\frac{n}{2}\right)}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\tau_{l,m-2l}}.$$

故得

$$\tau_{l,m-2l}=\frac{l!\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-l\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n-l)}V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \tag{7.5.2}$$

总之, 我们证明了

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}|zz'|^{2l}\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\dot{z}$$
$$=(N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)})\frac{l!\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)}V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \tag{7.5.3}$$

由于

$$N_{f-2l}=\frac{(n+f-2l-1)}{(f-2l)!(n-1)!},\quad V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\frac{1}{n!}$$

及

$$\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})=\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\left(f-2l+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)|zz'|^{f-2l}P_{f-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right),$$

公式 (7.5.3) 等价于

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}|zz'|^{2l}P_{f-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\dot{z}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^n\frac{(n+f-2l-3)!}{(f-2l)!(n-3)!}\frac{l!\Gamma\left(f+\frac{1}{2}n-l\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(f+n-l)}. \tag{7.5.4}$$

在以下几节中, 我们将用直接法来证明 (7.5.4).

§7.6　化重积分为单积分

命 $z = x + iy$, 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 由以下的公式定义:

$$1 > xx' + yy' + 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}$$

(§2.5). 研究积分

$$I = \int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} \cdots \int |zz'|^f F\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right) \dot{z}. \tag{7.6.1}$$

又一固定的 x, 作变形

$$y = \sqrt{xx'}u,$$

则显然有 $\dot{y} = (xx')^{\frac{1}{2}n}\dot{u}$. 于是积分范围变为

$$1 > xx'(1 + uu' + 2\sqrt{uu' - (xu'/\sqrt{xx'})^2}).$$

有一行列式为 1 的正交方阵使

$$x\Gamma = (\sqrt{xx'}, 0, \cdots, 0),$$

作变形

$$u\Gamma = (\xi, v),$$

此处 v 是一 $(n-1)$ 维的矢量. 由于

$$z\bar{z}' = xx' + yy' = xx'(1 + \boldsymbol{\xi}^2 + vv')$$

及

$$\begin{aligned}|zz'|^2 &= (xx' - yy')^2 + 4xy'^2 \\ &= (xx')^2[(1 - \xi^2 - vv')^2 + 4\xi^2],\end{aligned}$$

可知

$$I = \int_{1 > xx'(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})} \cdots \int (xx')^{f+\frac{1}{2}n}[(1 - \xi^2 - vv')^2 + 4\xi^2]^{\frac{1}{2}f}$$

$$F\left(\frac{1 + \xi^2 + vv'}{[(1 - \xi^2 - vv')^2 + 4\xi^2]^{1/2}}\right) d\xi\dot{v}\dot{x}.$$

又由于

$$\int_{xx'\leqslant A^2}\cdots\int (xx')^{f+\frac{n}{2}}\dot{x}=\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\int_0^A r^{n-1}r^{2f+n}dr=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{A^{2(f+n)}}{f+n},$$

可知

$$\begin{aligned}I=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{1}{f+n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\Big[(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})^{-(f+n)}[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{\frac{1}{2}f}\\&\times F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)\Big]d\xi\dot{v}\\=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{2^n}{f+n}\int_{\substack{v_2\geqslant0,\cdots,v_n\geqslant0\\ \xi\geqslant0}}\cdots\int\Big[\cdots\Big]d\xi\dot{v}.\end{aligned}\tag{7.6.2}$$

命 $vv'=\eta^2,\eta>0,v_2=\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}$, 则

$$\dot{v}=\frac{\eta d\eta dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}.$$

故 (7.6.2) 等于

$$\begin{aligned}I=&\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}2^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)(f+n)}\int_{\substack{v_3\geqslant0,\cdots,v_n\geqslant0\\ \xi\geqslant0,\eta\geqslant0\\ \eta^2\geqslant v_3^2+\cdots+v_n^2}}\cdots\int(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}[(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2]^{\frac{1}{2}f}\\&\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)d\xi\frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}dv_3\cdots dv_n.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{\substack{v_3^2+\cdots+v_n^2\leqslant\eta^2\\ v_3\geqslant0,\cdots,v_n\geqslant0}}\cdots\int\frac{dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}&=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\int_{v_3^2+\cdots+v_n^2\leqslant1}\cdots\int\frac{dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{1-v_3^2-\cdots-v_n^2}}\\&=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)},\end{aligned}$$

可得

$$I=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}2^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)(f+n)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}$$

$$\times [(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2]^{\frac{1}{2}f} F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}d\xi d\eta$$

$$= \frac{2^n \pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty (1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}[(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2]^{\frac{1}{2}f}$$

$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}d\xi d\eta$$

(此处用了习知公式 $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\cdot 2^{1-2x}$).

注意

$$(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2=(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\eta^2.$$

换变数

$$\tau=\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2\eta},$$

立得

$$\frac{1+\eta^2}{2\eta}\leqslant\tau\leqslant\infty$$

及

$$d\tau=\frac{\xi}{\eta}d\xi,\quad d\xi=\frac{\eta d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

故

$$I=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty d\eta\int_{(1+\eta^2)/2\eta}^\infty 2^{-n}\eta^{-1}(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2-1)^{\frac{1}{2}f}$$

$$\times F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

由于

$$\int_{2\eta\tau-1-\eta^2\geqslant 0}\frac{d\eta}{\eta\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}=\pi,$$

故可知

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_1^\infty(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2-1)^{\frac{1}{2}f}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)d\tau. \qquad (7.6.3)$$

§7.7 (7.6.3) 式的另一形式

命

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}},\quad d\tau=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t,$$

则 (7.6.3) 变为

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_1^{\infty}(t+\sqrt{t^2-1})^{-(f+n)}(t^2-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}F(t)\mathrm{d}t. \tag{7.7.1}$$

为了证明 (7.5.4), 我们只须证明

$$\begin{aligned}&\int_1^{\infty}(t+\sqrt{t^2-1})^{-(2l+m+n)}(t^2-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n}\frac{l!(n-3+m)!\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)}{m!\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)}.\end{aligned} \tag{7.7.2}$$

由 Rodrique 公式

$$\begin{aligned}&(1-t^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(t)\\&=\frac{(-2)^m}{m!}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma(m+n-2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma(2m+n-2)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m(1-t^2)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}\end{aligned}$$

可知, (7.7.2) 与公式

$$\begin{aligned}&\int_1^{\infty}(t+\sqrt{t^2-1})^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\right)^m(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2^{m+n-1}}\frac{(2l+m+n)l!\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)\Gamma(2m+n-2)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)}\end{aligned} \tag{7.7.3}$$

等价. 表面上看来, 此式无特殊函数, 但直接求证似乎并不容易.

命

$$t=\cosh x,$$

则 (7.7.1) 变为

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^{\infty}e^{-(f+n)x}(\sinh x)^{n-2}F(\cosh x)dx. \tag{7.7.4}$$

故 (7.5.4) 与公式

$$\int_0^{\infty}e^{-(m+n+2l)x}\sinh^{n-2}xP_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(\cosh x)dx$$

$$= \frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n} \frac{l!(n-3+m)!\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)}{m!\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)} \tag{7.7.5}$$

等价.

§7.8　(7.7.5) 的证明

用符号

$$a_q = a(a+1)\cdots(a+q-1),$$

显然有

$$\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(q)} = a_q, \quad \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-q)} = (-1)^q(1-a)_q$$

及

$$2^{-2q}\frac{\Gamma(a+2q)}{\Gamma(a)} = \left(\frac{1}{2}a\right)_q \left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)_q.$$

又由超几何级数 (Bailey[1], 8 页) 的定义可知, 当 $|z|<1$ 时, 级数

$${}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};z\\ \beta_1,\cdots,\beta_p\end{matrix}\right] = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}z^q$$

绝对收敛.

引理 1　当 $s>l$ 时

$$\int_0^{\infty} e^{-xs}(\sinh x)^l dx = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)\right)}.$$

证　命 $e^{-sx}=y$, 此积分等于

$$\frac{1}{2^l}\int_0^{\infty} e^{-x(s-l)}(1-e^{-2x})^l dx = \frac{1}{2^{l+1}}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}(s-l)-1}(1-y)^l dy$$

$$= \frac{1}{2^{l+1}} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+1\right)}.$$

引理 2　当 $s>l$ 时

$$\int_0^{\infty} e^{-xs}\cosh x(\sinh x)^l dx = s\frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{3}{2}\right)}.$$

证　由引理 1, 上一积分等于

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x(s-1)}(\sinh x)^l dx+\int_0^\infty e^{-x(s+1)}(\sinh x)^l dx\right)$$

$$=\frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1+l)+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1+l)+1\right)}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right).$$

引理 3　若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1}$ 中有一个是负整数, 则

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}{}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1};-\sinh^2 x\\ \beta_1,\cdots,\beta_p\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}{}_{p+3}F_{p+2}\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_{p+1},\lambda+\frac{1}{2},\lambda+1;1\\ \beta_1,\cdots,\beta_p,\frac{1}{2}s+\lambda+1,1+\lambda-\frac{1}{2}s\end{matrix}\right].$$

证　把超几何函数的级数表示式代入此式之左边, 经积分后的公项等于

$$(-1)^q\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda+2q}dx$$

$$=(-1)^q\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+q+1\right)}$$

$$=\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_q(\lambda+1)_q}{\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)_q\left(1+\lambda-\frac{1}{2}s\right)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)},$$

故得引理.

习知, 对任一偶整数 2ν(Szegö[1], 84 页), 常有

$$P_{2\nu}^{\lambda}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\Gamma(2\lambda)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda,1-x^2\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

由引理 3 可知

$$\int_0^{\infty} e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda} P_{2\nu}^{(\lambda)}(\cosh x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\Gamma(2\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -\nu, \nu+\lambda, -\sinh^2 x \\ \lambda+\frac{1}{2} \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\nu, \nu-\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+1; 1 \\ \lambda+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}s+\lambda+1, 1+\lambda-\frac{1}{2}s \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -\nu, \nu-\lambda, \lambda+1, 1 \\ \frac{1}{2}s+\lambda+1, 1+\lambda-\frac{1}{2}s \end{matrix} \right],$$

此处 ${}_3F_2$ 适合于 Saalschütz 条件 (Bailey[3], 9 页), 即 $a+b+c+1=d+e$ 且 a,b,c 中有一个是负整数. 已知对适合于 Saalschütz 条件的超几何级数有

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, c, 1 \\ d, e \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+b-e)\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(1-e)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)\Gamma(d-c)},$$

故

$$\int_0^{\infty} e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda} P_{2\nu}^{(\lambda)}(\cosh x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}.$$

此即 (7.7.5) 当 m 为偶数 2ν 的情形.

引理 4　若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ 中有一个是负整数, 则

$$\int_0^{\infty} e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda} {}_{p+1}F_p \left[\begin{matrix} \alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}; -\sinh^2 x \\ \beta_1, \cdots, \beta_p \end{matrix} \right] \cosh x\, dx$$

$$= s\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)} {}_{p+3}F_{p+2} \left[\begin{matrix} \alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+1; 1 \\ \beta_1, \cdots, \beta_p, \lambda-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}s+\frac{3}{2}+\lambda \end{matrix} \right].$$

证　写下 ${}_{p+1}F_p$ 的级数展开式, 乘以 $e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}$ 再逐项求积分, 得一级数其公项是

$$(-1)^q\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda+q\right)}$$

$$=s\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_q(\lambda+1)_q}{\left(\lambda-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\right)_q\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)_q}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)},$$

故得引理.

当 $m=2\nu+1$ 是一奇整数时

$$P_{2\nu+1}^{(\lambda)}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\Gamma(2\lambda)}x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda+1;1-x^2\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

由引理 4 可知

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}P_{2\nu+1}^{(\lambda)}(\cosh x)dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\Gamma(2\lambda)}\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu,\nu+\lambda+1;-\sinh^2 x\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\cosh x\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\Gamma(2\lambda)}\frac{s\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)}$$

$$\times\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda+1,\lambda+\frac{1}{2},\lambda+1;1\\ \lambda+\frac{1}{2},\lambda-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\frac{s}{2}+\lambda\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)s\lambda}{(2\nu+1)!2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\nu+\lambda+1,\lambda+1;1\\ \frac{1}{2}(s+3)+\lambda,\lambda-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\end{matrix}\right)$$

$$
= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!} \frac{s\lambda}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}
$$

$$
\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right)}.
$$

此处又用到了 Saalschütz 定理, 故得 (7.7.5).

附录一　一些等式

(本附录中列举一些本书中用到的初等工具, 其目的在于: (i) 这些工具可能在其他方面有用; (ii) 可以作为大学二、三年级同学的课外习题.)

1° 命 $D(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)$, 则有恒等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2\cdots x_{i_n}^2)}$$
$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)},$$

此处 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 乃由 1, 2,$\cdots,n$ 之排列而得. 若 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的偶排列, 则 $\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}=1$; 若是奇排列, 则 $\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}=-1$.

2° 又有恒等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots(1-x_{i_1}\cdots x_{i_{2\nu}})}$$
$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)},$$

此处 ν 表 $\frac{1}{2}n$ 的整数部分.

3°

$$\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=m\\ l_\nu\geqslant 0}}\frac{[D(l_1,\cdots,l_n)]^2}{l_1!\cdots l_n!}=n^{m-\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{n!(n-1)!\cdots 1!}{\left(m-\frac{1}{2}n(n-1)\right)!}.$$

4° 设

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

表一当 $|z|<\rho$ 时收敛的幂级数. 当 $|x_jy_k|<\rho$ 时,

$$\begin{vmatrix} f(x_1y_1), & \cdots, & f(x_1y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_ny_1), & \cdots, & f(x_ny_n) \end{vmatrix} = \sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\cdots a_{l_n} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

5° 设 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个具有我们所需要的微分次数的函数, 则有

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ \cdots\cdots \\ x_n\to x}} \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{D(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

6° 当 $\alpha > \frac{1}{2}n$ 时, 有

$$\int\cdots\int_T \frac{\dot{T}}{(\det(1+T^2))^{\alpha}} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha-\frac{1}{2}(n+\nu)\right)}{\Gamma(2\alpha-\nu)},$$

此处 T 过所有的 n 行列的实对称方阵, $T=(t_{jk}), \dot{T}=2^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{j\leqslant k}\mathrm{d}t_{jk}$.

7° 当 $n\geqslant 2$ 及 $\alpha > \frac{1}{4}(2n-3)$ 时, 有

$$\int\cdots\int_K \frac{\dot{K}}{(\det(I+KK'))^{a}} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(2\alpha-n+\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma(2\alpha-n+\nu)},$$

此处 K 过所有的 n 行列的实斜对称方阵, $K=(k_{ij}), \dot{K}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}$.

8° 当 $\alpha > n - \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\int \cdots \int_H \frac{\dot{H}}{(\det(I+H^2))^\alpha} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{\frac{1}{2}n^2} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\alpha - j - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - j)} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(2\alpha - n - k)}{\Gamma(2\alpha - 2k - 1)},$$

此处 H 过所有的 Hermite 方阵 $(h_{jk}), h_{jj} = h_j, h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk} (j \neq k)$ 及

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk} dh''_{jk}.$$

9° Z 是 $m \times n$ 复数元素的矩阵. 当 $\lambda > -1$ 时, 有

$$\int \cdots \int_{I - Z\bar{Z}' > 0} \det(I - Z\bar{Z}')^\lambda \dot{Z} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\lambda + j) \prod_{k=1}^{m} \Gamma(\lambda + k)}{\prod_{l=1}^{n+m} \Gamma(\lambda + l)} \pi^{mn},$$

此处 $Z = (z_{jk}), z_{ik} = x_{jk} + iy_{jk}, \dot{Z} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} dx_{jk} dy_{jk}$.

10° Z 是复数元素的对称方阵. 当 $\lambda > -1$ 时, 有

$$\int \cdots \int_{I - Z\bar{Z} > 0} (\det(I - Z\bar{Z}))^\lambda \dot{Z}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)},$$

此处 $\dot{Z} = \prod_{j \leqslant k} dx_{jk} dy_{jk}$.

11° 命 $n \geqslant 2$, Z 是 $n \times n$ 复数元素的斜对称方阵. 当 $\lambda > -\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\int \cdots \int_{I + Z\bar{Z} > 0} \det(I + Z\bar{Z})^\lambda \dot{Z} = \pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-2)},$$

此处 $\dot{Z} = \prod_{j<k} dx_{jk} dy_{jk}$.

12° 当 $\alpha > -1, \beta > -(n+\alpha)$ 时, 有

$$\int \cdots \int_{\substack{|zz'|^2 + 1 - 2z\bar{z}' > 0 \\ |zz'| < 1}} (1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\alpha (1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\beta \dot{z}$$

$$= \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)},$$

此处 $z=(z_1,\cdots,z_n), z_j = x_j+iy_j, \dot{z} = \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j$.

13°

$$\int\cdots\int_{U\bar{U}'=I} \frac{\dot{U}}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}} = \frac{(2\pi)^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}\det(I-Z\bar{Z}')^{-n},$$

此处 Z 与 U 皆是 $m\times n$ 复数矩阵, $\dot{U}$ 表在流形 $U\bar{U}'=I$ 上之体积元素.

14°

$$\int\cdots\int_{U\bar{U}=I} \frac{\dot{U}}{|\det(I-Z\bar{U})|^{n+1}}$$

$$= 2^{\frac{n(3n+1)}{4}} \pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)} \det(I-Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n+1)},$$

此处 Z 与 U 皆是 $n\times n$ 复数对称方阵, $\dot{U}$ 表流形 $U\bar{U}=I$ 之体积元素.

15° Z 与 K 皆是 $n\times n$ 复数斜对称方阵. 当 n 是偶数时,

$$\int\cdots\int_{K\bar{K}'=I} \frac{\dot{K}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n-1)}, \quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

此处 $\dot{K}$ 表流形 $K\bar{K}'=I$ 之体积元素; 当 n 是奇数时,

$$\int\cdots\int_{K} \frac{\dot{K}}{|\det(I-Z\bar{K})|^{n-1}}$$

$$= 2^{-\nu}\frac{1}{2^{2\nu-2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

此处 K 过所有形如

$$K = \Gamma\left[\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_\nu} \\ -e^{i\theta_\nu} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} 0\right]\Gamma'$$

之方阵, Γ 是任意的实正交方阵.

16°

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{C}_{\text{IV}}} \frac{\dot{\xi}}{|(z-\xi)(z-\xi)'|^n} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{-\frac{1}{2}n},$$

此处 $z=(z_1,\cdots,z_n),\xi=e^{i\theta}(x_1,\cdots,x_n),\dot{\xi}$ 是流形

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad x_1^2+\cdots+x_n^2=1$$

之体积元素.

17°

$$\int\cdots\int_{\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi} \frac{1}{\left|\prod_{j=1}^{n}(1-re^{-i\theta_j})\right|^{2n}} \prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n$$
$$=\frac{1!2!\cdots(n-1)!}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}(1-r^2)^{-n^2}\quad (r<1).$$

18°

$$\int_1^{\infty}(t+\sqrt{t^2-1})^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\right)^m(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2^{m+n-1}}\frac{(2l+m+n)l!\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)\Gamma(2m+n-2)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)}.$$

附录二　矩阵坐标变换公式

1°　命 U 代表酉方阵, H 是爱尔米方阵, $\dot{U}$ 表酉方阵所成的空间之体积元素, $\dot{H}$ 表爱尔米方阵所成空间的体积元素, 则此二空间除较低维的流形外, 在变换

$$U=(I+iH)(I-iH)^{-1}$$

之下是一一对应的, 并且其体积元素间有以下的关系:

$$\dot{U}=2^{n^2}\det(I+H^2)^{-n}\dot{H}.$$

2°　任一酉方阵 U 可以表成

$$U=VA\bar{V}',\quad A=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}],\quad 2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0,$$

此处 V 是酉方阵, 如命 $\mathfrak{U}_n$ 表酉方阵所成之群, 则所有 $A=[e^{i\theta_1,\cdots,e^{i\theta_n}}]$ 形的酉方阵成 $\mathfrak{U}_n$ 的一个子群. $\mathfrak{U}_n$ 对这个子群的左傍系的集合命之为 $[\mathfrak{U}_n]$, $[\mathfrak{U}_n]$ 也成一空间, 其体积元素以 $[\dot{U}]$ 表之, 则有

$$\dot{U}=[\dot{U}]\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

3°　任一爱尔米方阵 H 可以表成

$$H=UA\bar{U}',\quad A=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n],\quad \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,$$

此处 U 是酉方阵. 于是

$$\dot{H}=[\dot{U}]\prod_{j<k}(\lambda_j-\lambda_k)^2d\lambda_1,\cdots d\lambda_k.$$

4°　命 Z 是任意复数方阵, 这些方阵所成的空间的体积元素以 $\dot{Z}$ 表之. Z 可以表为

$$Z=UAV,\quad A=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n],\quad \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

此处 U 与 V 皆是酉方阵, 于是

$$\dot{Z}=[\dot{U}]\dot{V}\prod_{j<k}(\lambda_j-\lambda_k)^2d\lambda_1\cdots d\lambda_n.$$

5°　任一对称的复数方阵 Z 可以表为

$$Z = U\Lambda U',\quad \Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n],\quad \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0,$$

此处 U 是酉方阵. 以 $\dot{Z}$ 表复数对称方阵所成之体积元素. 酉群 $\mathfrak{U}_n$ 的元素 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 成一子群, $\mathfrak{U}_n$ 对此子群之左傍系命之为 $\{\mathfrak{U}_n\}$, $\{\mathfrak{U}_n\}$ 之体积元素命之为 $\{\dot{U}\}$, 于是

$$\dot{Z} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j<k} |\lambda_j^2 - \lambda_k^2| \lambda_1 \cdots \lambda_n d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \{\dot{U}\}.$$

6°　实的对称方阵 T 所成的空间与对称的酉方阵 S 所成的空间除较低维的流形外, 在变换

$$S = (I + iT)(I - iT)^{-1}$$

之下是一一对应的, 并且

$$\dot{S} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(I + T^2)^{-\frac{n+1}{2}} \dot{T}.$$

7°　命 K 是能表为下列形式:

$$K = \Gamma F \Gamma'$$

的斜对称方阵, 此处 Γ 是行列式为 1 之实正交方阵, 它们所成之群以 O_n^+ 表之.

$$F = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_\nu} \\ -e^{i\theta_\nu} & 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_\nu} \\ -e^{i\theta_\nu} & 0 \end{pmatrix} \dot{+} 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \end{cases}$$

此处 $2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0,\quad \nu = \left[\frac{n}{2}\right]$.

命 Δ 为所有公式:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix} \dot{+} 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

的实正交方阵所成之群; 以 Σ 代表 O_n^+ 对子群 Δ 之左傍系, $\dot{\Sigma}$ 为其体积元素, 则

$$\dot{K} = a \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) d\theta_1 \cdots d\theta_\nu \dot{\Sigma},$$

其中

$$a = \begin{cases} 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

8° 空间 O_n^+ 与实斜对称方阵 K 所成的空间除较低维的流形外, 在变换

$$\Gamma = (I-K)(I+K)^{-1}$$

之下是一一对应的, 并有

$$\dot{\Gamma} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det(I-K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}.$$

参考文献

华罗庚

[1] On the theory of automorphic functions of a matrix variables I-Geometrical basis, *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 470–488.

[2] On the theory of automorphic functions of a matrix variables II-The classification of hypercircles under the symplectic group, *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 531–563.

[3] On the theory of Fuchsian functions of several variables, *Annals of Math.*, **47** (1946), 167–191.

[4] 多复变数函数论 I- 矩阵双曲空间的一完整正交函数系, 数学学报, **3**(1953), 288–323.

[5] 多复变数函数论 II- 超球双曲空间的一完整正交函数系, 数学学报, **5**(1955), 1–25.

[6] 多复变数函数论 III- 对称方阵及斜对称方阵双曲空间的完整正交函数系, 数学学报, **5** (1955), 205–242.

[7] 一些定积分, 数学学报, **6**(1956), 302–312.

[8] 一个偏微分方程组, 科学记录, **1**(1957), 339–340.

[9] 广义函数论导引, 数学进展, **4**(1963), 391–409.

[10] 酉群上的调和分析, 科学通报 (将发表).

华罗庚与陆启铿

[1] 关于奇数行列斜对称方阵双曲空间的 Cauchy 公式, 科学记录, **1** (1958), 19–21.

[2] 典型域的调和函数论, 中国科学, **8**(1959), 1031–1094.

Фукс, Б, А.

Теория аналитических функций моногих комплексных переменных, ОГИЗ, 1948, Москва.

Понтрягин, М. Г.

Непрерывные группы, ОГИЗ, 1954, Москва-Ленинград.

Bailcy, W. N.

Generalized hypergeometric serics, Cambridge tracts, No. 32, 1935.

Behuke, H. and Thullen, P.

Theorie der funktionen mehreren komplexer veränderlichen, *Erg. der Math.*, 3:3, Berlin, 1934.

Bergman, S.

[1] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes aver des applications à la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1947, Paris.

[2] Kernel functions of several complex variables, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, Bruxelles, 1953, 125–157.

Bochner, S.

[1] Group invariants of Cauchy's formula in several variables, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 686–707.

[2] A theorem on analytic continuation of functions in several variables, *Ann. of Math.*, **39**(1938), 14–19.

[3] Boundary values of analytic functions in several variables and almost periodic functions, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 708–722.

Bochner, S. and Martin, W. T.

Several complex variables, 1948, Princeton.

Borel, A.

Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, *Bull. Soc, Math, France*, **80** (1952), 167–182.

Cartan, E.

Sur les domaines bornés homogènes del'espace de n variables complexes, *Hamburg. Univ. Math. sem. Abhandl.*, **11**(1936), 106–162.

Cartan, H.

Sur les fonctions de deux variables complexes et problème de la représentative analytique, *J. Math. pures et appl.*, **10**(1931), 1–114.

Mitchell, J.

[1] The kernel function in the geometry of matrices, *Duke Math.*, 2, **19**(1952), 575–583.

[2] Potential theory in the geometry of matrices, *Trans. Amer. Soc.*, **79**(1955), 401–422.

Murnaghan, F. D.

The theory of group representations, The John Hopkins Press. 1938.

Siegel, C. L.

Symplectic geometry, *Amer. J. of Math.*, **45**(1943), 1–86.

Thrall, R. M.

On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, *Amer. Tous. of Math.*, **64**(1942), 371–384.

Szegö, G.

Orthogonal polynomials, Amer Math. Soc. Colloquium Publ. 1938.

Weil, A.

L'intégration dans les groups topologiques et ses applications, Hermann, 1940, Paris.

Weyl, H.

[1] Harmonics on homogeneous manifolds, *Ann. of Math.*, **35**(1934), 486–499.

[2] The classical groups, Princeton Univ. Press, 1946.

附　注

校者注:

定理 4.6.3 是错误的, 主要是因为 (4.6.5) 式的 $B(\xi, a, U)$ 就是 Poison 核, 对 a 来说不是 $\mathfrak{R}$ 的解析函数, 把 $\xi \in \mathfrak{L}$ 改为 $z \in \mathfrak{R}$ 时, $B(z, a, U)$ 也不是 z 的解析函数. 作者误认为是. 其实, 作者与校对者合作于 1959 年发在《中国科学》的文章 (见书中参加文献华罗庚、陆启铿 [2]), 已经把这一个错误改正过来. 不知为什么修正版中没有把此错误更正. 作者在 §4.7 中据此定理推出的典型域的 Cauchy 核的论证当然也是错误的, 但结果是正确的, 因为可以从 Poisson 公式推出 Cauchy 公式 (见陆启铿"典型流形与典型域", 上海科技出版社, (1963)).

《华罗庚文集》已出版书目

（按出版时间排序）

1 华罗庚文集数论卷 I 王元 审校 2010 年 5 月
2 华罗庚文集数论卷 II 贾朝华 审校 2010 年 5 月
3 华罗庚文集数论卷 III 王元 潘承彪 贾朝华 审校 2010 年 5 月
4 华罗庚文集代数卷 I 万哲先 审校 2010 年 5 月
5 华罗庚文集多复变函数论卷 I 陆启铿 审校 2010 年 5 月
6 华罗庚文集应用数学卷 I 杨德庄 主编 2010 年 5 月
7 华罗庚文集应用数学卷 I 杨德庄 主编 2010 年 5 月
8 华罗庚文集代数卷 II 待定
9 华罗庚文集多复变函数论卷 II 待定